

Rudiney Hoffmann Casali

**OBJETOS ESTELARES COMPACTOS SUJEITOS A  
CAMPOS MAGNÉTICOS FORTES**

Tese submetida ao Programa de pós-  
graduação em física para a obtenção  
do Grau de doutor.

Orientadora

Universidade Federal de Santa Cata-  
rina: Profa. Dra. Débora Peres Menezes

Florianópolis

2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor através do  
Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da  
UFSC.

A ficha de identificação é elaborada pelo próprio autor

Maiores informações em:  
<http://portalbu.ufsc.br/ficha>

Rudiney Hoffmann Casali

**OBJETOS ESTELARES COMPACTOS SUJEITOS A  
CAMPOS MAGNÉTICOS FORTES**

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “doutor”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de pós-graduação em física.

Florianópolis, 09 de agosto 2013.

---

Prof. Dr. Luis Guilherme de C. Rego  
Coordenador  
Universidade Federal de Santa Catarina

**Banca Examinadora:**

---

Profa. Dra. Débora Peres Menezes  
Orientadora  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Marcelo Chiapparini  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Prafulla K. Panda  
C. V. Raman College of Engineering, Bhubaneswar. Índia/  
Universidade de Coimbra, Portugal

---

Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Jr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Dr. Luiz Rafael Benito Castro  
Universidade Federal de Santa Catarina

A meus pais, pilares do meu desenvolvimento.



## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço à professora Débora Menezes, por ter aceitado mais este desafio e pela dedicação e paciência. Aos colegas do grupo de física nuclear pelas frutíferas discussões. Ao professor Sidney Avancini pela ajuda e disponibilidade. Agradeço ao professor Marcelo Chiapparini, pelo código que possibilitou os cálculos de massa-raio e à professora Constança Providência, pelo ano de dedicação compartilhada comigo em Coimbra. Agradeço aos demais professores e servidores pela dedicação e auxílio.

Por fim agradeço à Clarice, pelo conforto de saber em quem confiar e pela preocupação com meu sucesso. Agradeço a meus pais Ermani e Mariza e à minha família, pelo apoio e dedicação que sempre me proporcionaram, e aos demais que estiveram ligados à realização desse projeto.





“...e, se me parecer que afirma ter adquirido a virtude e não a adquiriu, hei de repreendê-lo por estimar menos o que vale mais e mais o que vale menos”.

(Sócrates, 469-399 ac.)



# SUMÁRIO

Resumo .....	
Abstract .....	
Lista de Figuras .....	
Lista de Tabelas .....	
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA.....	1
<b>2 FORMALISMO DO MODELO DE WALECKA</b>	
<b>NÃO LINEAR.....</b>	<b>7</b>
2.1 AS LAGRANGIANAS UTILIZADAS .....	7
2.2 AS EQUAÇÕES DE ESTADO.....	12
2.3 ANÁLISE DOS EFEITOS DA INCLUSÃO DO TERMO	
$\Lambda_\omega$ EM MATÉRIA DE PRÓTONS E NÊUTRONS.....	20
2.3.1 A energia de simetria e sua inclinação.....	22
2.4 AS RELAÇÕES MASSA-RAIO .....	25
2.5 A INCLUSÃO DE HÍPERONS .....	27
2.5.1 Análise dos efeitos da inclusão do termo $\Lambda_\omega$ em	
matéria hiperônica .....	30
2.6 O CAMPO MAGNÉTICO DEPENDENTE DA DENSI-	
DADE. ....	35
2.7 A INFLUÊNCIA DO TERMO $\Lambda_\omega$ NOS CAMPOS MESÔNICOS	36
<b>3 OS EFEITOS DO CAMPO MAGNÉTICO NA</b>	
<b>ENERGIA DE SIMETRIA E EM SUA INCLINAÇÃO</b>	<b>41</b>
<b>4 EFEITOS DO CAMPO MAGNÉTICO NAS EQUAÇÕES</b>	
<b>DE ESTADO E SUAS CONSEQUÊNCIAS NAS</b>	
<b>PROPRIEDADES ESTELARES .....</b>	<b>47</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS</b>	
<b>FUTURAS .....</b>	<b>73</b>
APÊNDICE A – Matrizes de Pauli e Dirac .....	77
APÊNDICE B – Momento magnético anômalo. ..	83
APÊNDICE C – As equações de movimento .....	91
APÊNDICE D – As Equações de Estado .....	99
APÊNDICE E – Tópicos em relatividade geral. ..	115
REFERÊNCIAS .....	127



## RESUMO

Nesta tese aplicamos campos magnéticos da ordem de  $10^{17} \text{ G}$  e  $10^{18} \text{ G}$  à matéria de nucleons e estudamos sua influência sobre a energia de simetria e sua inclinação. Investigamos também os efeitos causados pela inclusão dos momentos magnéticos anômalos nessas quantidades. Depois, investigamos os efeitos causados por fortes campos magnéticos nas propriedades de objetos compactos, compostos por matéria hadrônica em equilíbrio- $\beta$ , interagindo através dos campos mesônicos ( $\sigma - \omega - \rho$ ). Para isso utilizamos o modelo efetivo de Walecka não linear e algumas parametrizações comumente utilizadas.

Submetendo matéria hadrônica a campos magnéticos da ordem de  $10^{17} \text{ G}$  e  $10^{18} \text{ G}$ , estudamos os efeitos da inclusão dos momentos magnéticos anômalos às equações de estado e das relações de massa-raio correspondentes. Apresentamos também um estudo a respeito da inclusão de um termo que leva em conta a interação entre os mésons  $\omega$  e  $\rho$  nessas equações de estado submetidas a fortes campos magnéticos. Por fim fazemos um comparativo entre as curvas dos modelos teóricos obtidos e dados observacionais de três sistemas binários conhecidos. No final deste trabalho estão incluídos os papers publicados durante o doutorado e também um trabalho submetido.

**Palavras-chave:** Estrelas de nêutrons. Magnetares. Campos magnéticos.



## ABSTRACT

In this thesis we apply magnetic fields of the order of  $10^{17} G$  and  $10^{18} G$  to nuclear matter, and study its influence on the symmetry energy and its slope. We also study the effects caused by the inclusion of anomalous magnetic moments to these quantities.

Then, we investigate the effects caused by strong magnetic fields on the properties of compact objects, composed by hadronic matter in  $\beta$ -equilibrium, interacting via  $(\sigma - \omega - \rho)$  mesonic fields. To do so we use the non-linear Walecka model and some parametrizations normally found in the literature.

Submitting hadronic matter to magnetic fields of the order of  $10^{17} G$  and  $10^{18} G$ , we also study the effects of the inclusion of the anomalous magnetic moment to the equations of state and corresponding mass-radius relation. We also study the effects of the inclusion of a term that takes into account the interaction between the  $\omega$  and  $\rho$  mesons subject to strong magnetic fields. At last we compare the obtained curves for the theoretical models with three known binary systems observation data.

At the end of this work are included the papers published during the PhD period e also a submitted work.

**Keywords:** Neutron stars. Magnetars. Magnetic fields.





## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Ilustração de um pulsar.....	2
Figura 2	Matéria de nêutrons e prótons em equilíbrio- $\beta$ , com $B = 0$ $G$ , para as parametrizações NL3 (azul claro), FSU (rosa), GM1 (vermelho) e GM3 (preto).....	21
Figura 3	Matéria de nêutrons e prótons em equilíbrio- $\beta$ , com $B = 0$ $G$ , para as parametrizações NL3 (azul claro), FSU (rosa), GM1 (vermelho) e GM3 (preto).....	22
Figura 4	Energia de simetria em função da densidade bariônica, para parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3, FSU, NL3 e GM3....	23
Figura 5	Inclinação da energia de simetria em função da densidade bariônica, para parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3, FSU, NL3 e GM3. ....	24
Figura 6	Equações de estado para matéria de nucleons (vermelho) e matéria hiperônica, com $B = 0$ $G$ e três valores para a constante de acoplamento $X_\sigma = 0.6$ (rosa), $X_\sigma = 0.7$ (azul escuro) e $X_\sigma = 0.8$ (verde).....	28
Figura 7	Frações de partículas para matéria hiperônica, com parametrização GM1, $B = 0$ $G$ e $X_\sigma = 0.6$ . ....	28
Figura 8	Frações de partículas para matéria hiperônica, com parametrização GM1, $B = 0$ $G$ e $X_\sigma = 0.7$ .....	29
Figura 9	Frações de partículas para matéria hiperônica, com parametrização GM1, $B = 0$ $G$ e $X_\sigma = 0.8$ .....	29
Figura 10	Comparativo para a inclusão do fator $\Lambda_\omega$ nas curvas $B = 0$ $G$ das parametrizações GM1 ( $\Lambda_\omega = 0$ ), GM1-2 ( $\Lambda_\omega = 0.01$ ) e GM1-3 ( $\Lambda_\omega = 0.03$ ), para $X_\sigma = 0.6$ , e as respectivas frações de partículas. .	30
Figura 11	Comparativo para a inclusão do fator $\Lambda_\omega$ nas curvas $B = 0$ $G$ das parametrizações GM1 ( $\Lambda_\omega = 0$ ), GM1-2 ( $\Lambda_\omega = 0.01$ ) e GM1-3 ( $\Lambda_\omega = 0.03$ ), para $X_\sigma = 0.7$ , e as respectivas frações de partículas. .	31
Figura 12	Comparativo para a inclusão do fator $\Lambda_\omega$ nas curvas $B = 0$ $G$ das parametrizações GM1 ( $\Lambda_\omega = 0$ ), GM1-2 ( $\Lambda_\omega = 0.01$ ) e GM1-3 ( $\Lambda_\omega = 0.03$ ), para $X_\sigma = 0.8$ , e as respectivas frações de partículas. .	32
Figura 13	Comparativo para a inclusão do fator $\Lambda_\omega$ nas parametrizações GM1 ( $\Lambda_\omega = 0$ - vermelho), GM1-2 ( $\Lambda_\omega = 0.01$ - verde) e GM1-3 ( $\Lambda_\omega = 0.03$ - azul escuro), para diferentes constantes de acoplamento $X_\sigma$ dos híperons.....	33

Figura 14 Relações de massa-raio para matéria de nucleons (vermelho) e matéria hiperônica, com três valores para a constante de acoplamento $X_\sigma = 0.6$ (rosa), $X_\sigma = 0.7$ (azul escuro) e $X_\sigma = 0.8$ (verde).....	34
Figura 15 Campos magnéticos dependentes da densidade $B_0 = 10^{17} G$ e $B_0 = 3.1 \times 10^{18} G$ , definidos como decaimento lento ( $\gamma = 1$ , $\beta = 0.550$ ) curvas em azul escuro e como decaimento rápido ( $\gamma = 4$ , $\beta = 0.006$ ) curvas em vermelho.....	36
Figura 16 Curvas (FIX) das parametrizações GM1 (verde), GM1-2 (azul escuro) e GM1-3 (rosa) para a inclusão de termo $\Lambda_\omega$ , com constante de acoplamento $X_\sigma = 0.6$ , campo magnético de $B_0 = 3.1 \times 10^{18} G$ e $\gamma = 1$ .....	37
Figura 17 Curvas (VAR) das parametrizações GM1 (verde), GM1-2 (azul escuro) e GM1-3 (rosa) para a inclusão de termo $\Lambda_\omega$ , com constante de acoplamento $X_\sigma = 0.6$ , campo magnético de $B_0 = 3.1 \times 10^{18} G$ e $\gamma = 1$ .....	38
Figura 18 Curvas (FIX) (vermelho) e (VAR) (verde) da parametrização GM1, com constante de acoplamento $X_\sigma = 0.6$ , campo magnético de $B_0 = 3.1 \times 10^{18} G$ e $\gamma = 1$ .....	39
Figura 19 Energias de simetria das parametrizações GM1 (vermelho), GM1-2 (verde) e GM1-3 (azul escuro). Curvas (FIX), com campos magnéticos de $B_0 = 10^{17}$ (painel superior) e $B_0 = 10^{18}$ (painel inferior) são aplicados e não há a inclusão de momentos magnéticos anômalos. ....	41
Figura 20 Energias de simetria da parametrização GM1. Curvas $B = 0 G$ (vermelho), (FIX) (verde), (VAR- $\gamma = 1$ ) (azul escuro) e (VAR- $\gamma = 4$ ) (rosa) com campo magnético de $B_0 = 10^{18} G$ , sem (painel superior) e com (painel inferior) a inclusão de momentos magnéticos anômalos. ....	42
Figura 21 Energia de simetria para as curvas (FIX) das parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3, para campos magnéticos $B = 0 G$ (vermelho) $B_0 = 10^{17} G$ (verde) e $B_0 = 10^{18} G$ (azul escuro), $k_b = 0$ . ....	43
Figura 22 Inclinação para as curvas (FIX) das parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3, $k_b = 0$ , para campos magnéticos $B = 0$ (vermelho) $B_0 = 10^{17}$ (verde) e $B_0 = 10^{18}$ (azul claro).....	44
Figura 23 Inclinação para as curvas (VAR) das parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3, $\gamma = 1$ , $k_b = 0$ , para campos magnéticos $B = 0$ (vermelho) $B_0 = 10^{17}$ (verde) e $B_0 = 10^{18}$ (azul escuro).....	45

Figura 24 Inclinação para as curvas (VAR) das parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3, $\gamma = 4$ , $k_b = 0$ , para campos magnéticos $B = 0$ (vermelho) $B_0 = 10^{17}$ (verde) e $B_0 = 10^{18}$ (azul escuro).....	46
Figura 25 Equações de estado para curvas do caso (FIX), parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3, $\gamma = 1$ , $X_\sigma = 0.7$ , $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$ G, $k_b = 0$ , $k_{n,p}$ e $k_{n,p,hyp}$ .....	47
Figura 26 Equações de estado para curvas do caso (VAR), parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3, $\gamma = 1$ , $X_\sigma = 0.7$ , $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$ G, $k_b = 0$ , $k_{n,p}$ e $k_{n,p,hyp}$ .....	48
Figura 27 Zoom do comparativo das equações de estado para curvas GM1 dos casos (FIX) e (VAR), para $X_\sigma = 0.7$ , $\gamma = 1 - 4$ , $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$ G e $k_b = 0$ .....	49
Figura 28 Relação de massa-raio para uma curvas do caso (FIX) e decaimento lento $\gamma = 1$ , com campo magnético $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$ G, constante de acoplamento $X_\sigma = 0.7$ e três consições de inclusão de momento magnético anômalo, $k_b = 0$ , $k_{n,p}$ e $k_{n,p,hyp}$ .....	50
Figura 29 Relação de massa-raio para uma curvas do caso (VAR) e decaimento lento $\gamma = 1$ , com campo magnético $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$ G, constante de acoplamento $X_\sigma = 0.7$ e três consições de inclusão de momento magnético anômalo, $k_b = 0$ , $k_{n,p}$ e $k_{n,p,hyp}$ .....	51
Figura 30 Massas máximas em função das constantes de acoplamento $X_\sigma$ utilizadas. Com $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$ G e $k_b = 0$ . Massas $B = 0$ G (vermelho); massas (FIX) $\gamma = 1$ (verde), $\gamma = 4$ (azul escuro); massas (VAR) $\gamma = 1$ (rosa), $\gamma = 4$ (azul claro).....	52
Figura 31 Raios correspondentes às massas máximas em função das constantes de acoplamento $X_\sigma$ utilizadas. Com $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$ G e $k_b = 0$ . Massas $B = 0$ G (vermelho); massas (FIX) $\gamma = 1$ (verde), $\gamma = 4$ (azul escuro); massas (VAR) $\gamma = 1$ (rosa), $\gamma = 4$ (azul claro). .....	53
Figura 32 Densidades centrais de energia correspondentes às massas máximas, em função das correções de momento magnético anômalo utilizadas, com $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$ G. Caso (FIX); $\gamma = 1$ , $X_\sigma = 0.6$ (vermelho), $X_\sigma = 0.7$ (azul escuro), $X_\sigma = 0.8$ (azul claro); $\gamma = 4$ , $X_\sigma = 0.6$ (verde), $X_\sigma = 0.7$ (rosa), $X_\sigma = 0.8$ (amarelo).....	54
Figura 33 Densidades centrais de energia correspondentes às massas máximas, em função das correções de momento magnético anômalo utilizadas, com $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$ G. Caso (VAR); $\gamma = 1$ , $X_\sigma = 0.6$ (vermelho), $X_\sigma = 0.7$ (azul escuro), $X_\sigma = 0.8$ (azul claro); $\gamma = 4$ , $X_\sigma = 0.6$ (verde), $X_\sigma = 0.7$ (rosa), $X_\sigma = 0.8$ (amarelo).....	55

Figura 34 Comparação entre os valores de massa gravitacional e bariônica observados para o pulsar PSR J0737-3059 e as curvas teóricas para a parametrização GM1 (FIX). A letra S seguida por um número apresenta o conjunto de parâmetros representados pela curva.....	57
Figura 35 Comparação entre os valores de massa gravitacional e bariônica observados para o pulsar PSR J0737-3059 e as curvas teóricas para a parametrização GM1-2 (FIX).....	59
Figura 36 Comparação entre os valores de massa gravitacional e bariônica observados para o pulsar PSR J0737-3059 e as curvas teóricas para a parametrização GM1-3 (FIX).....	61
Figura 37 Comparação entre os valores de massa gravitacional e bariônica observados para o pulsar PSR J0737-3059 e as curvas teóricas para a parametrização GM3 (FIX).....	63
Figura 38 Comparação entre os valores de massa gravitacional e bariônica observados para o pulsar PSR J0737-3059 e as curvas teóricas para a parametrização GM1-3 (VAR).....	65
Figura 39 Comparação entre os valores de massa gravitacional e bariônica observados para o pulsar PSR J0737-3059 e as curvas teóricas para a parametrização GM3 (VAR). ....	67
Figura 40 Relação de massa-raio das estrelas S46 (menor raio) e S60 (maior raio) em comparação com as medidas observacionais da massa gravitacional do pulsar PSR J0737-3059B ( $M = 1.249 \pm 0.001 M_0$ ). ....	69
Figura 41 Relação de massa-raio das estrelas S11-28 e S49-66 em comparação com as medidas observacionais da massa gravitacionais dos pulsares PSR J0737-3059B ( $M = 1.249 \pm 0.001 M_0$ ), PSR J1614-2230 ( $M = 1.97 \pm 0.04 M_0$ ) e PSR J0348+0432 ( $M = 2.01 \pm 0.04 M_0$ ). ....	70

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Escala de campos magnéticos. ....	4
Tabela 2	Valores dos acoplamentos escalares e vetoriais híperon-nucleon [12]. ....	9
Tabela 3	Parâmetros utilizados nesse trabalho, juntamente com o medelo ao qual pertencem. ....	9
Tabela 4	Continuação da tabela 2.1. ....	10
Tabela 5	Propriedades de saturação das parametrizações utilizadas. ....	10
Tabela 6	Massas, cargas elétricas, momentos magnéticos, momentos anômalos e projeções de isospin dos bárions considerados. ....	11
Tabela 7	Parâmetros das curvas GM1 que cruzam os dados observacionais para PSR J0737-3039. ....	58
Tabela 8	Parâmetros das curvas GM1-2 que cruzam os dados observacionais para PSR J0737-3039. ....	60
Tabela 9	Parâmetros das curvas GM1-3 que cruzam os dados observacionais para PSR J0737-3039. ....	62
Tabela 10	Parâmetros das curvas GM3 que cruzam os dados observacionais para PSR J0737-3039. ....	64
Tabela 11	Parâmetros das curvas GM1-3 que cruzam os dados observacionais para PSR J0737-3039. ....	66
Tabela 12	Parâmetros das curvas GM3 que cruzam os dados observacionais para PSR J0737-3039. ....	68



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA

Em março de 1979 duas sondas soviéticas, Venera 11 e 12, foram enviadas em órbita elíptica para o interior do sistema solar. Elas registravam leituras de radiação nominais de 100 contagens por segundo, porém às 10:51 hs, no horário do leste dos Estados Unidos, as contagens saltaram abruptamente para mais de 200000 contagens por segundo. Um enorme pulso de radiação gama as havia atingido. Tratava-se de um *"gamma ray burst"* (GRB).

Cerca de dez segundos depois a sonda espacial da NASA, Helios 2, que também orbitava o sol, registrou essa onda de radiação de alta energia que logo atingiu e saturou o detector Pioneer, que orbitava Venus e na sequência inundou os detectores localizados na Terra: três satélites Vela do departamento de defesa dos Estados Unidos, o satélite soviético Prognoz 7 e o observatório Einstein. Por fim, ao deixar o sistema solar, o satélite internacional Sun-Earth Explorer também foi atingido [1].

Apesar desse pulso, que durou apenas décimos de segundo, ter tido aproximadamente 100 vezes mais intensidade que qualquer outro já registrado anteriormente originado fora do sistema solar, ele não foi imediatamente notado pelos pesquisadores. Esse grande pulso foi seguido por emissões gradativamente mais fracas, de menor energia, que ficaram conhecidas como *"soft gamma rays"*, assim como por emissões de raio-x que desvaneceram-se após três minutos. À medida que enfraquecia, o sinal oscilava com um período de oito segundos.

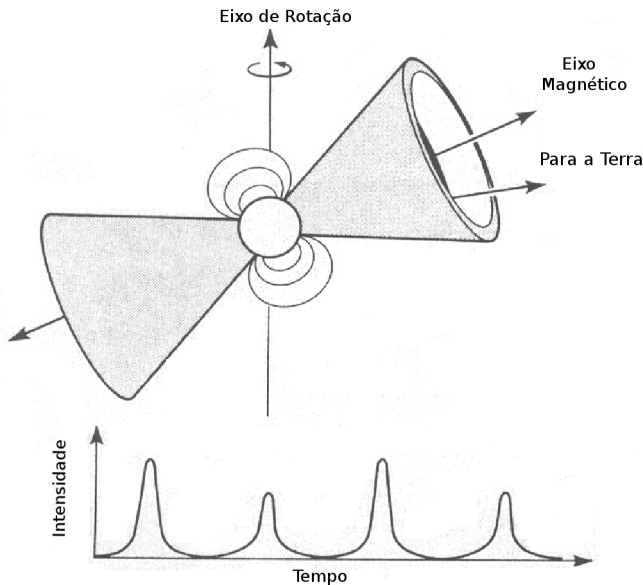
A fonte desse sinal foi mais tarde identificada como coincidente com a remanescente da supernova, ou "supernova remnant" (SNR) N49, e devido às subseqüentes emissões em raios gama menos energéticos essa fonte ficou conhecida como repetidora de raios gamma, ou *"soft gamma-ray repeater"* (SGR) [2, 3].

Como nunca haviam visto nada igual até aquele momento, os astrônomos não sabiam como identificar aquele grande pulso de radiação que acometeu todos aqueles satélites, de modo que, por falta de opção, o classificaram como uma explosão de raios gama, ou no inglês, *"gamma ray bursts"* (GRB).

No ano de 1986, em um encontro na cidade francesa de Toulouse, astrônomos entraram em acordo sobre a localização e classificação do fenômeno observado sete anos antes. Então em 1998, 19 anos e muitos

questionamentos após o primeiro evento, observações indicavam que mais um elemento no zoológico celeste estava envolvido: os pulsares anômalos de raio-X, ou “anomalous x-ray pulsar”(AXPs)<sup>1</sup>. estrelas com altos campos magnéticos e baixos períodos de rotação emitindo na faixa dos raios x. Mais um ingrediente para o já complicado entendimento das estrelas de nêutrons.

Figura 1 – Ilustração de um pulsar.



O limite de Chandrasekhar estabelece um valor máximo para a massa de uma estrela estável. Essa massa máxima depende da composição da estrela e pode assumir valores como  $M_{Ch} = 1.44 M_0$  para anãs-brancas, compostas usualmente por oxigênio e carbono, ou  $M_{Ch} = 1.22 M_0$  para estrelas com núcleo de ferro. Em estrelas formadas por um núcleo de ferro com massa acima desse limite a pressão de degenerescência dos elétrons não é capaz de balancear a atração gravitacional, dessa forma o colapso se torna inevitável [5, 6]. O remanescente desse colapso pode ser uma proto-estrela de nêutrons ou um buraco negro. Aqui estudaremos as estrelas de nêutrons, cujo raio

<sup>1</sup>Para uma leitura informativa sobre as formas de detecção dos sinais de rádio recomendo [4]



possui valores tipicamente entre 10 e 20 Km e massa entre uma e duas massas solares [7, 8].

A descoberta dos SGRs nos possibilitou imaginar uma estrela de nêutrons detentora de campos magnéticos tão fortes, que são capazes de alterar radicalmente seu conteúdo interno e o espaço que as envolve, sendo chamadas de magnetares. A teoria magnetar dos SGRs entra em cena como uma tentativa de explicar a origem dos campos magnéticos em pulsares de rádio, que foram descobertos quase que por acaso, por Jocelyn Bell na Universidade de Cambridge em 1967. Os pulsos de emissão de rádio, que de início eram tidos como esporádicos, foram notados durante um estudo para investigar os efeitos da cintilação interplanetária de fontes de rádio. Jocelyn era uma estudante de pós-graduação que trabalhava com um grupo liderado por Anthony Hewish, que ganhou o Nobel em 1974. Ela notou que a emissão sempre ocorria em uma mesma posição no espaço, indicando que a fonte não estava na Terra [9].

Pulsares são tipos comuns de objetos compactos. Mais de 1900 já foram detectados desde 1968. Eles emitem radiação na faixa do rádio pelo universo à medida que a estrela gira, como um farol, como mostra a figura (1). Medições precisas mostram que à medida que o tempo passa os períodos de oscilação crescem, indicando que essas estrelas tendem a girar cada vez mais devagar. Essa diminuição na velocidade do giro é atribuída aos campos magnéticos dessas estrelas, gerados por correntes elétricas que circulam dentro dos pulsares [10].

Essas ondas de rádio levam consigo energia, causando a diminuição na velocidade de giro dessas estrelas. A medida da taxa com que a velocidade de giro diminui permite estimar o campo magnético, que para a maioria dos pulsares fica por volta de  $10^{12} G$ . Na tabela 1.1 apresentamos alguns valores de campos magnéticos para facilitar o entendimento das dimensões envolvidas:

Tabela 1 – Escala de campos magnéticos.

Fonte de Campo Magnético	Medição	Valor
Terra	Medido no pólo Norte	$0.6\text{ G}$
Imã comum	Do tipo que se usa em geladeiras	$100\text{ G}$
Manchas solares	Superfície solar	$4000\text{ G}$
Mais alto já conseguido em laboratório	Por apenas 8 micro-segundos	$10^7\text{ G}$
Superfície de um pulsar de rádio	Estrela de nêutrons mais comum	$10^{12} - 10^{13}\text{ G}$
Magnetar	Superfícies de SGRs, AXPs	$10^{14} - 10^{15}\text{ G}$

Magnetares, então, são pulsares que possuem enormes campos magnéticos, da ordem de  $> 10^{14} \text{ G}$ , que emitem jatos de radiação na faixa de raios  $\gamma$  e  $x$  e podem brilhar milhões de vezes mais do que muitos outros emissores conhecidos.

Apresentamos aqui um estudo de magnetares, utilizando o modelo de Walecka não linear para diversas parametrizações. Investigaremos matéria hadrônica interagente via campos mesônicos ( $\sigma - \omega - \rho$ ), submetida a campos magnéticos de até  $3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ .

No segundo capítulo apresentamos o formalismo do modelo de Walecka não linear com as lagrangianas e parametrizações utilizadas, e as equações de estado e relações de massa-raio aplicadas. Estudamos a inclusão do termo  $\Lambda_\omega$ , usado para alterar a dependência da energia de simetria com a densidade, na matéria de nucleons e de hádrons, apresentando alguns resultados para a matéria sem campo magnético. Depois, com a introdução do campo magnético dependente da densidade, estudamos como esse termo atua sobre a matéria hadrônica submetida a fortes campos magnéticos.

No terceiro capítulo mostramos nossos resultados dos efeitos de fortes campos magnéticos sobre a energia de simetria e sua inclinação. Fazemos uma comparação entre as parametrizações que incluem ou não o termo  $\Lambda_\omega$  e também entre as curvas com e sem a inclusão do momento magnético anômalo.

No capítulo quatro apresentamos como as equações de estado e relações de massa-raio podem ser alteradas pelas diferentes combinações entre os campos magnéticos e suas dependências na densidade, constantes de acoplamento e correções dos momentos magnéticos. Por fim comparamos nossos resultados com alguns dados observacionais.

O quinto capítulo é reservado às conclusões finais e perspectivas futuras.



## 2 FORMALISMO DO MODELO DE WALECKA NÃO LINEAR.

### 2.1 AS LAGRANGIANAS UTILIZADAS

O *princípio de Hamilton*, ou de *mínima ação* afirma que as equações de movimento devem ser aquelas para as quais a ação clássica  $S$  seja um extremo [11], ou seja:

$$\delta S = 0, \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L[q, \dot{q}] dt, \quad (2.1)$$

vemos que a lagrangiana acima é função das coordenadas generalizadas  $q$  e  $\dot{q}$ . Em teoria de campos consideramos, de forma análoga, uma densidade Lagrangiana dos campos e suas respectivas 4-derivadas [12]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)], \quad (2.2)$$

em que  $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z)$ , como em (A.1) e suas derivadas como em (A.4). A lagrangiana é definida como uma integral espacial da densidade lagrangiana:

$$L \equiv \int d\vec{r} \mathcal{L}[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)], \quad (2.3)$$

aqui  $\psi$  é análogo à  $q$  e da mesma forma  $\partial_\mu \psi$  é análogo à  $\dot{q}$ .

Para a descrição das equações de estado da matéria hadrônica, empregamos uma aproximação de campo, na qual os bárions interagem pela troca dos mésons  $\sigma - \omega - \rho$  e do fóton ( $A^\mu$ ), na presença de um campo magnético  $B$  ao longo do eixo- $z$ . A densidade lagrangiana total é formada, no setor dos hádrons, pelo modelo de Walecka não linear (NLWM), um setor leptônico e um setor do campo eletromagnético, como podemos ver a seguir:

$$\mathcal{L} = \sum_b \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_m + \sum_l \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_B. \quad (2.4)$$

em que  $\mathcal{L}_b$ ,  $\mathcal{L}_m$ ,  $\mathcal{L}_l$  e  $\mathcal{L}_B$  são as densidades lagrangianas dos bárions, mésons, léptons e campo eletromagnético, respectivamente, e são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_b = & \bar{\psi}_b (i\gamma_\mu \partial^\mu - q_b \gamma_\mu A^\mu - m_b + g_{\sigma b} \sigma \\ & - g_{\omega b} \gamma_\mu \omega^\mu - g_{\rho b} \tau_{3b} \gamma_\mu \rho^\mu - k_b \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \psi_b, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - U(\sigma) + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ & - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}_\mu - \frac{1}{4} P^{\mu\nu} P_{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{4!} \xi g_{\omega b}^4 (\omega_\mu \omega^\mu)^2 + \Lambda_\omega (g_{\rho b}^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu) (g_{\omega b}^2 \omega_\mu \omega^\mu) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_l = \bar{\psi}_l (i\gamma_\mu \partial^\mu - q_l \gamma_\mu A^\mu - m_l) \psi_l, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

A soma  $b$  é feita sobre o octeto bariônico  $b \equiv p, n, \Lambda, \Sigma^{\pm,0}, \Xi^{-,0}$ ,  $\psi_b$  é o campo de Dirac do bárion correspondente, cujas interações são mediadas pelo campos mesônicos escalar  $\sigma$ , isoescalar-vetorial  $\omega_\mu$  e isovetor-vetorial  $\rho_\mu$ . A massa do respectivo bárion e a projeção de isospin são definidas como  $m_b$  and  $\tau_{3b}$ , respectivamente. As constantes de acoplamento das interações fortes são denotadas por  $g$ . O primeiro subscrito em  $g$  está ligado ao campo mesônico  $\sigma, \omega$  ou  $\rho$ , ao qual o cada bárion, definido pelo segundo subscrito, irá se acoplar. Dividiremos os bárions entre  $b=H$  (híperons/hyp) ou  $b=N$  (Nucleons), de modo que teremos  $g_{\sigma N}, g_{\omega N}$  e  $g_{\rho N}$  para os nucleons e  $g_{\sigma H}, g_{\omega H}$  e  $g_{\rho H}$  para os híperons.

Apesar de não existirem em matéria nuclear normal, podemos obter informações sobre as constantes de acoplamento entre os híperons e os mésons, a partir de nucleos finitos. Neste trabalho, a suposição de que todos os híperons do octeto bariônico apresentam os mesmos valores das constantes de acoplamento do híperon  $\Lambda^0$  é feita, e esses serão definidos como uma razão entre os acoplamentos dos híperons e dos nucleons, com os campos mesônicos:

$$X_\sigma = g_{\sigma H}/g_{\sigma N}, \quad X_\omega = g_{\omega H}/g_{\omega N}, \quad X_\rho = g_{\rho H}/g_{\rho N}, \quad (2.9)$$

onde os valores<sup>1</sup> de  $X_i$  escolhidos para esse trabalho são apre-

---

<sup>1</sup>Usaremos  $X_\sigma$  como referência para as combinações dos três acoplamentos.

sentados na Tabela 2.1:

Tabela 2 – Valores dos acoplamentos escalares e vetoriais híperon-nucleon [12].

$X_\sigma$	0.600	0.700	0.800
$X_\omega$	0.653	0.783	0.913
$X_\rho$	0.653	0.783	0.913

O termo  $U(\sigma) = \frac{1}{3}bm_n(g_{\sigma N}\sigma)^3 - \frac{1}{4}c(g_{\sigma N}\sigma)^4$  se refere às auto-interações escalares [13, 14, 15]. Os tensores de campo mesônico e eletromagnético são definidos por suas expressões usuais  $\mathbf{\Omega}_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu$ ,  $\mathbf{P}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{\rho}_\nu - \partial_\nu\vec{\rho}_\mu - g_{\rho N}(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu)$  and  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . A soma- $l$  é feita sobre os léptons mais leves  $l \equiv e, \mu$  e  $\psi_l$  é o campo de Dirac para os léptons. Os parâmetros  $\xi$ , usados para descrever as auto-interações do méson omega e  $\Lambda_\omega$ , que modifica a dependência da energia de simetria com a densidade, são incluídos. [16, 17].

Apresentamos nas tabelas 2.1, 2.1 e 2.1 as parametrizações utilizadas, bem como suas respectivas propriedades à densidade de saturação. Apresentamos também breves explicações a respeito das parametrizações escolhidas. Primeiramente GM1 e GM3, propostas em 1991, por Glendenning e Moszkowski [18] com a intenção de resolver incertezas nas massas máximas, causada por constantes determinadas através das propriedades da matéria nuclear e observações empíricas, através do estudo da ligação do híperon  $\Lambda$  em matéria nuclear.

Tabela 3 – Parâmetros utilizados nesse trabalho, juntamente com o medelo ao qual pertencem.

Modelo	$m_\sigma$ (MeV)	$m_\omega$ (MeV)	$m_\rho$ (MeV)	$g_{\sigma N}$	$g_{\omega N}$	$g_{\rho N}$
GM1	512.000	783.000	770.000	8.910	10.610	8.196
GM1-2	512.000	783.000	770.000	8.910	10.610	8.196
GM1-3	512.000	783.000	770.000	8.910	10.610	8.196
NL3	508.194	783.000	763.000	10.217	12.868	8.948
FSU	491.500	782.500	763.000	10.592	14.302	11.767
GM3	512.000	783.000	770.000	8.175	8.712	8.259

A parametrização NL3 [19] foi proposta em 1997 por Lalazissis, Konig e Ring, com a intenção de sanar os problemas gerados pelo alto

valor da energia de simetria e desvios sistemáticos nos valores de pele de nêutrons das medidas experimentais da parametrização prévia NL1.

Tabela 4 – Continuação da tabela 2.1.

Modelo	c	b	$\xi$	$\Lambda_\omega$
GM1	-0.001070	0.002947	0.00	0.00
GM1-2	-0.001070	0.002947	0.00	0.01
GM1-3	-0.001070	0.002947	0.00	0.03
NL3	-0.002651	0.002052	0.00	0.00
FSU	0.003960	0.000756	0.06	0.01
GM3	-0.002421	0.008659	0.00	0.00

Em 2005 Todd-Rutel e Piekarewicz propuseram a parametrização FSU [20, 21]. Com ela pretendiam controlar melhor a dependência da energia de simetria com a densidade e encontrar valores para essa energia ainda menores que aqueles encontrados primeiramente por Lalazisis, König e Ring, com o NL3.

Tabela 5 – Propriedades de saturação das parametrizações utilizadas.

Modelo	-B/A (MeV)	$a_{sym}$ (MeV)	L(MeV)	$m^*/m$	$n_0(fm^{-3})$
GM1	16.3	32.5	94	0.70	0.153
GM1-2	16.3	30.6	81	0.70	0.153
GM1-3	16.3	28.3	64	0.70	0.153
NL3	16.299	37.4	118	0.60	0.148
FSU	16.3	32.6	61	0.62	0.148
GM3	16.3	32.5	90	0.78	0.153

Os momentos magnéticos anômalos<sup>2</sup>, do inglês “anomalous magnetic moment”(AMM) dos bárions, definidos como  $k_b = (\mu_b/\mu_N) - q_b(m_p/m_b)$  [22], em que  $\mu_N$  é o magneton nuclear,  $\mu_b$  é o momento magnético bariônico,  $q_b$  e  $m_b$  são a carga e a massa do bárion b e  $m_p$  é a massa do próton, são introduzidos pelo acoplamento dos mesmos ao tensor eletromagnético, em que  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ . Os valores dos momentos magnéticos anômalos adotados podem ser encontrados na tabela 2.1 [23]. Os momentos magnéticos anômalos dos léptons podem ser desprezados, pois seus efeitos são muito pequenos [24].

---

<sup>2</sup>Ver apêndice B



Tabela 6 – Massas, cargas elétricas, momentos magnéticos, momentos anômalos e projeções de isospin dos bárions considerados.

Baryon	p	n	$\Lambda^0$	$\Sigma^+$	$\Sigma^0$	$\Sigma^-$	$\Xi^0$	$\Xi^-$
$M_b$ (MeV)	939	939	1115.7	1189.4	1189.4	1189.4	1314.9	1314.9
$q_b$	1	0	0	1	0	-1	0	-1
$\mu_b/\mu_N$	2.79	-1.91	-0.61	2.46	1.61	-1.16	-1.25	-0.65
$k_b$	1.79	-1.91	-0.61	1.67	1.61	-0.38	-1.25	0.06
$\tau_{3b}$	+1/2	-1/2	0	+1	0	-1	+1/2	-1/2

Além disso e  $m_i$ ,  $q_i$  e  $\psi_i$ , com  $i = b, l$  são a massa, carga e campos dos bárions e léptons respectivamente. Ainda  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$  é o quadri-vetor do campo eletromagnético externo, com  $\vec{A}$  sendo o potencial vetor e  $\phi$  sendo o potencial escalar. Negligenciamos o momento magnético anômalo dos léptons pois seu efeito é muito pequeno, como mostrado em [23, 25, 26].

O estudo dos objetos compactos sob a influência de campos magnéticos fortes se tornou importante depois de recentes observações e desenvolvimentos teóricos [1, 3, 26, 27] sobre os efeitos desses grandes campos nas equações de estado da matéria estelar.

## 2.2 AS EQUAÇÕES DE ESTADO

Para o calibre usaremos como base as implicações das expressões de Maxwell :

$$A^\mu(x) = \delta_{\mu 2} x_1 B; \quad A^0 = 0; \quad \vec{A}(\vec{x}) = (0, B, 0); \quad (2.10)$$

a primeira expressão acima indica que teremos indução magnética em apenas uma direção, a segunda indica que o potencial escalar é zero o que implica na não existência de um campo elétrico externo. Usaremos também as respectivas definições de indução magnética como sendo o rotacional do potencial vetor e a definição *gauge transversa* do divergente do potencial vetor resultado das transformações de Gauge aplicadas ao mesmo [28]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = B \vec{e}_3, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (2.11)$$

Apresentaremos aqui apenas as expressões finais utilizadas<sup>3</sup>. Usando a densidade lagrangiana (2.4), a aproximação de campo-médio e fazendo as considerações a respeito das invariâncias rotacionais e translacionais envolvidas, as expressões para os mésons são derivadas com o auxílio da equação de Euler-Lagrange:

---

<sup>3</sup>Porém as deduções podem ser conferidas nos apêndices C e D, os cálculos foram realizados para matéria estelar de prótons e nêutrons, elétrons e muos, motivação de nossos trabalhos iniciais, porém a generalização para híperons é simples e direta.

$$m_\sigma^2 \sigma_0 = -cg_\sigma^4 \sigma_0^3 - bm_n g_{\sigma b}^3 \sigma_0^2 + g_{\sigma N} \sum_N n_b^s \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
& + g_{\sigma N} \sum_H X_\sigma n_b^s \\
m_\omega^{*2} \omega_0 &= -\frac{\xi}{6} g_{\omega b}^4 \omega_0^3 + g_{\omega N} \sum_N n_b^v + g_{\omega N} \sum_H X_\omega n_b^v \\
m_\rho^{*2} \rho_0 &= g_{\rho N} \sum_N \tau_{3b} n_b^v + g_{\rho N} \sum_H X_\rho \tau_{3b} n_b^v, \\
m_\rho^{*2} &= m_\rho^2 + 2\Lambda_\omega g_{\rho N}^2 g_{\omega N}^2 \omega_0^2, \\
m_\omega^{*2} &= m_\omega^2 + 2\Lambda_{\omega b} g_{\rho N}^2 g_{\omega N}^2 \rho_{03}^2.
\end{aligned} \quad (2.13)$$

As densidade escalares e vetoriais dos bárions com e sem carga elétrica são definidos como:

$$\begin{aligned}
n_b^s &= \frac{|q_b| B m_b^*}{2\pi^2} \sum_\nu^{\nu_{\max}} \sum_s \frac{\bar{m}_b^c}{\sqrt{m_b^{*2} + 2\nu |q_b| B}} \\
&\times \ln \left| \frac{p_{F,\nu,s}^b + E_F^b}{\bar{m}_b^c} \right| \\
n_b^v &= \frac{|q_b| B}{2\pi^2} \sum_\nu^{\nu_{\max}} \sum_s p_{F,\nu,s}^b \\
n_b^s &= \frac{m_b^*}{4\pi^2} \sum_s \left[ E_F^b p_{F,s}^b - \bar{m}_b^2 \ln \left| \frac{p_{F,s}^b + E_F^b}{\bar{m}_b} \right| \right] \\
n_b^v &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \left[ \frac{1}{3} (p_{F,s}^b)^3 - \frac{1}{2} s \mu_N k_b B \right. \\
&\times \left. \left( \bar{m}_b p_{F,s}^b + (E_F^b)^2 \left( \arcsin \left( \frac{\bar{m}_b}{E_F^b} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \\
n_l^v &= \frac{|q_l| B}{2\pi^2} \sum_\nu^{\nu_{\max}} \sum_s p_{F,\nu,s}^l.
\end{aligned} \quad (2.14)$$

O espectro de energia para os bárions [27]:

$$E_{\nu,s}^b = \sqrt{(p_z^b)^2 + (\sqrt{m_b^* + 2\nu|q_b|B} - s\mu_N k_b B)^2} \quad (2.15)$$

$$+ g_{\omega b} \omega^0 + \tau_{3b} g_{\rho b} \rho^0$$

$$E_s^b = \sqrt{(p_z^b)^2 + (\sqrt{m_b^* + (p_\perp^b)^2} - s\mu_N k_b B)^2} \quad (2.16)$$

$$+ g_{\omega b} \omega^0 + \tau_{3b} g_{\rho b} \rho^0,$$

com  $p_\perp^b = p_x^b + p_y^b$  e  $\nu = n + \frac{1}{2} - \text{sgn}(q_b) \frac{s}{2} = 0, 1, 2, \dots$  são os níveis de Landau para os férmions com carga elétrica  $q$ ,  $s$  é o número quântico de spin e assume valores  $+1$  para spin up e  $-1$  para down.

Definindo os momentos de Fermi dos bárions carregados  $p_{F,\nu,s}^b$  e dos nêutros  $p_{F,s}^b$  e dos léptons  $p_{F,\nu,s}^l$  e suas relações com as energias de Fermi dos bárions carregados  $E_{F,\nu,s}^b$  e dos nêutros  $E_{F,s}^b$  e dos léptons  $E_{F,\nu,s}^l$ :

$$(p_{F,\nu,s}^b)^2 = (E_{F,\nu,s}^b)^2 - [\sqrt{m_b^{*2} + 2\nu q_b B} - s\mu_N k_b B]^2 \quad (2.17)$$

$$(p_{F,s}^b)^2 = (E_{F,s}^b)^2 - (m_b^* - s\mu_N k_b B)^2$$

$$(p_{F,\nu,s}^l)^2 = (E_{F,\nu,s}^l)^2 - (m_l^2 + 2\nu|q_l|B)^2, \quad l = e, \mu.$$

A soma sobre os níveis de Landau  $\nu$  é feita até  $\nu_{max}$ , este é o maior valor de  $\nu$  para o qual o quadrado do momento de Fermi das partículas ainda é positivo e corresponde ao mais próximo inteiro abaixo de:

$$\nu_{max} = \left\lfloor \frac{(E_{\nu,s}^b + s\mu_N k_b B)^2 - (m_b^*)^2}{2|q_b|B} \right\rfloor, \text{ bárions carregados.} \quad (2.18)$$

$$\nu_{max} = \left\lfloor \frac{(E_{F,\nu,s}^l)^2 - (m_l)^2}{2|q_l|B} \right\rfloor, \text{ léptons.}$$

Os potenciais químicos dos bárions e léptons são dados respectivamente por:

$$\mu_b = E_F^b + g_{\omega b} \omega^0 + g_{\rho b} \tau_{3b} \rho^0, \text{ b=n, p, hyp.} \quad (2.19)$$

$$\mu_l = E_F^l = \sqrt{(p_{F,\nu,s}^l)^2 + m_l^2 + 2\nu|q_l|B}.$$

A densidade de energia total da matéria é dada por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m = & \sum_b \varepsilon_b + \sum_{e,\mu} \varepsilon_l + \frac{1}{2} m_\sigma \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho \rho_0^2 \quad (2.20) \\ & - \frac{1}{24} \xi (g_\omega \omega_0)^4 + \frac{1}{3} b m_n (g_\sigma \sigma_0)^3 + \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma_0)^4 \\ & - \Lambda_\omega (g_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu) (g_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu), \end{aligned}$$

As expressões para as densidades de energia para os bárions carregados eletricamente  $\varepsilon_b^c$  e para os nêutros  $\varepsilon_b^n$  são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b^c = & \sum_{\nu=0}^{\nu_{max}} \sum_s \frac{|q_b|B}{4\pi^2} \left[ p_{F,\nu,s}^b E_F^b + (\sqrt{m_b^{*2} + 2|q_b|B\nu} \right. \quad (2.21) \\ & \left. - s\mu_N k_b B)^2 \times \ln \left| \frac{p_{F,\nu,s}^b + E_F^b}{(\sqrt{m_b^{*2} + 2|q_b|B\nu} - s\mu_N k_b B)} \right| \right], \\ \varepsilon_b^n = & \frac{1}{4\pi^2} \sum_s \frac{1}{2} E_F^{b3} p_{F,s}^b - \frac{2}{3} s\mu_N k_b B E_F^{n3} \\ & \times \left( \arcsin \frac{\bar{m}}{E_F^b} - \frac{\pi}{2} \right) - \left( \frac{1}{3} s\mu_N k_b B + \frac{1}{4} \bar{m} \right) \\ & \left[ \bar{m} p_{F,s}^b E_F^b + \bar{m}^3 \ln \left( \left| \frac{E_F^b + p_{F,s}^b}{\bar{m}} \right| \right) \right] \\ \varepsilon_l = & \frac{|q_l|B}{4\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{max}} \sum_s \left[ p_{F,\nu,s}^l E_F^l + \bar{m}_l^2 \ln \left| \frac{p_{F,\nu,s}^l + E_F^l}{\bar{m}_l} \right| \right]. \end{aligned}$$

A pressão dos bárions é dada por  $P_m = (\sum_b \mu_i n_i^v + \sum_l \mu_i n_i^v) - \varepsilon_m$ .

As contribuições do campo magnético para a densidade de energia e para a pressão são calculadas a partir do tensor de energia momento para o campo eletromagnético [29].

$$T^{\mu\nu} = [F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}], \quad (2.22)$$

ou na forma matricial:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E^2 + B^2) & S_x & S_y & S_z \\ S_x & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

em que definimos o vetor de poynting e o tensor de Maxwell como:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}, \quad \sigma_{ij} = [(E_i E_j + B_i B_j) - \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\delta_{ij}]. \quad (2.24)$$

Uma vez que não há campos elétricos envolvidos ( $\vec{E} = 0$ ), quando tomamos  $T^{\mu\nu}$ , temos:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(B^2) & S_x & S_y & S_z \\ S_x & -(B_1 B_1 - \frac{1}{2}B^2) & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y & -\sigma_{yx} & -(B_2 B_2 - \frac{1}{2}B^2) & -\sigma_{yz} \\ S_z & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -(B_3 B_3 - \frac{1}{2}B^2) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

sabendo que  $B_1 = B_2 = 0$  e que apenas o campo magnético na direção  $B_3$  é aplicado, temos:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}B^2 & S_x & S_y & S_z \\ S_x & \frac{1}{2}B^2 & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y & -\sigma_{yx} & \frac{1}{2}B^2 & -\sigma_{yz} \\ S_z & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\frac{1}{2}B^2 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Em partículas carregadas, a presença de um campo magnético forte pode fazer com que as pressões longitudinais e transversais à direção do campo magnético se tornem diferentes, essa anisotropia cresce com a intensidade do campo magnético aplicado. O mesmo pode também ocorrer com partículas não carregadas, mas que possuam momento magnético anômalo. Muitos modelos para estrelas de nêutrons tentaram incluir os efeitos anisotrópicos do campo magnético às três dimensões da estrutura das estrelas de nêutrons [30, 31]. Alguns desses modelos obtiveram sucesso com modificações da métrica relativística necessária para descrever a quebra na simetria esférica causada pelo campo magnético, entretanto ainda não há um estudo capaz de incluir

simultaneamente os efeitos do campo magnético nas equações de estado e também os efeitos da pressão anisotrópica às propriedades estáticas e dinâmicas das estrelas de nêutrons altamente magnetizadas. Sob essa perspectiva e considerando um recente trabalho [32] que mostra que a anisotropia não é significativa até valores de campo da ordem de  $B \approx 3.2 \times 10^{18} \text{ G}$ , mantemos o valor máximo dos campos magnéticos aplicados nesse trabalho abaixo desse limite.

Observando o tensor (2.26) vemos que a densidade de energia associada à contribuição do campo magnético, assim como suas pressões paralelas e perpendiculares são dadas por:

$$\varepsilon_B = T^{00} = \frac{1}{2}B^2, \quad (2.27)$$

$$P_{B\perp} = \frac{1}{2}(T^{11} + T^{22}) = \frac{1}{2}B^2, \quad (2.28)$$

$$P_{B\parallel} = T^{33} = -\frac{1}{2}B^2. \quad (2.29)$$

Como os valores dos campos magnéticos aplicados não são tão altos, os efeitos de anisotropia podem ser desconsiderados e as equações de estado são tomadas como isotrópicas. Faremos uma aproximação que despreza a pressão paralela  $P_{B\parallel}$  ao campo magnético, de modo que:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_B \rangle &= \frac{B^2}{2}, \\ \langle P_B \rangle &= \frac{B^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dessa forma, a energia total pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \varepsilon_m + \frac{B^2}{2} \\ P_t &= P_m + \frac{B^2}{2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Quando consideramos matéria hadrônica não submetida a campos magnéticos, usamos as seguintes expressões para as densidades escalares e vetoriais de bárions e léptons [33]:

$$\begin{aligned}
n_b^s &= \frac{m_b^*}{4\pi^2} \sum_s \left[ E_F^b p_{F,s}^b - m_b^{*2} \ln \left| \frac{p_{F,s}^b + E_F^b}{m_b^*} \right| \right], \\
n_b^v &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \frac{1}{3} (p_{F,s}^b)^3, \\
n_l^v &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \frac{1}{3} (p_{F,s}^l)^3.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

As seguintes expressões para o cálculos das densidades de energia:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_b &= \frac{1}{16\pi^2} \sum_s \left\{ E_F^b p_{F,s}^b m_b^{*2} + 2E_F^b (p_{F,s}^b)^3 \right. \\
&\quad \left. - m_b^{*4} \ln \left[ \left| \frac{E_F^b + p_{F,s}^b}{m_b^*} \right| \right] \right\}, \\
\varepsilon_l &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_s \left\{ E_F^l p_{F,s}^l m_l^2 + 2E_F^l (p_{F,s}^l)^3 - m_l^{*4} \ln \left[ \left| \frac{E_F^l + p_{F,s}^l}{m_l} \right| \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

E para a densidade de energia e pressão totais da matéria usamos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_m &= \sum_b \varepsilon_b + \sum_{e,\mu} \varepsilon_l + \frac{1}{2} m_\sigma \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho \rho_0^2 \\
&\quad + \frac{1}{24} \xi (g_\omega \omega_0)^4 + \frac{1}{3} b m_n (g_\sigma \sigma_0)^3 + \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma_0)^4 \\
&\quad - \Lambda_\omega (g_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu) (g_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu) \\
P_m &= \left( \sum_b \mu_i n_i^v + \sum_l \mu_i n_i^v \right) - \varepsilon_m
\end{aligned} \tag{2.34}$$

As primeiras teorizações a respeito das remanescentes estelares conduziam à ideia de que essas deveriam possuir carga elétrica neutra, investigações posteriores a respeito da composição da matéria hadrônica mostraram que novas partículas poderiam ser formadas, mantendo a neutralidade de cargas.

Os estudos com o decaimento- $\beta$  começaram no início do século XX e geraram grande insatisfação e desconfiança pois seus resultados apresentaram discrepâncias daquilo que se esperava, em termos de con-



servação de energia e de número leptônico. Como vemos na equação:

$$n \rightleftharpoons p + e^{-}. \quad (2.35)$$

Foi por isso que em 1931 Wolfgang Pauli (1900-1958) postulou que mais uma partícula deveria participar do decaimento, a fim de preservar a conservação dessas grandezas. Essa partícula viria a ser denominada, em 1934, como neutrino, ou pequeno neutron, por Enrico Fermi (1901-1954). O neutrino deveria possuir carga nula, massa desprezível e também spin  $1/2$ . A expressão do decaimento do nêutron se torna:

$$n \rightleftharpoons p + e^{-} + \bar{\nu}_e. \quad (2.36)$$

Essa reação de decaimento do nêutron em um próton, um elétron e um neutrino garante o resfriamento das proto-estrelas de nêutrons através da emissão desses neutrinos, um processo conhecido como desleptonização.

Após a explosão em supernova da estrela original, a estrela de nêutrons remanescente evolui quimicamente até uma configuração estável de equilíbrio químico, expressa pela igualdade nos potenciais químicos, como vemos abaixo:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \mu_{\Sigma^+} = \mu_n - \mu_e, \\ \mu_{\Lambda} &= \mu_{\Sigma^0} = \mu_{\Xi^0} = \mu_n, \\ \mu_{\Sigma^-} - \mu_{\Xi^-} &= \mu_n + \mu_e, \\ \mu_{\mu} &= \mu_e. \end{aligned} \quad (2.37)$$

A imposição da neutralidade de carga é tomada, pois se admitirmos uma estrela com carga elétrica resultante devemos considerar as forças coulombianas envolvidas. A repulsão causada por uma carga resultante entre partículas de mesmo sinal poderia superar a atração gravitacional entre as mesmas. Para evitar tal problema a carga resultante admitida deve ser inferior a um valor mínimo. A relação abaixo expressa melhor essa colocação. Vamos supor uma carga elétrica resultante positiva:

$$\frac{(Ze)e}{R^2} \leq \frac{GMm_p}{R^2} < \frac{GAm_p^2}{R^2}, \quad (2.38)$$

que nos diz que a força coulombiana deve ser menor ou igual à força

gravitacional, em que  $Ze$ ,  $R$  e  $M$  são a carga resultante medida em termos da carga elétrica elementar, o raio e a massa da estrela;  $m_p$  e  $e$  são a massa e a carga do próton; a constante gravitacional  $G$  e a velocidade da luz  $c$  são ambas tomadas em unidades naturais como 1. O número de bárions  $A$ , na estrela indica a massa bariônica  $Am_p$ , da mesma, e como esta se trata de um estado gravitacionalmente ligado teremos que  $M < Am_p$ . Da equação acima encontramos:

$$\frac{Z}{A} < \left( \frac{m_p}{e} \right)^2, \quad (2.39)$$

que é o limite de carga resultante por bárion permitido para que as forças coulombianas repulsivas não excedam a força gravitacional. Fazendo  $m_p = 938$  MeV e o quadrado da carga elétrica elementar  $e^2 = 1.44$  MeV fm encontramos:

$$\left( \frac{m_p}{e} \right)^2 = 0.8 \times 10^{-36} A, \quad (2.40)$$

ou seja,  $Z < 10^{-36} A$  é o maior valor que a carga resultante positiva em uma estrela pode atingir sem que haja complicações coulombianas. Assim a carga resultante por nucleon, e por sua vez a carga média por nucleon, deve ser desprezível. Porém essa condição é global e não local na estrela e não limita o número de cargas, de sinais iguais ou opostos.

Então, para garantir a neutralidade de carga, a densidade de cargas positivas existente dentro da estrela deve se igualar a densidade de cargas negativas:

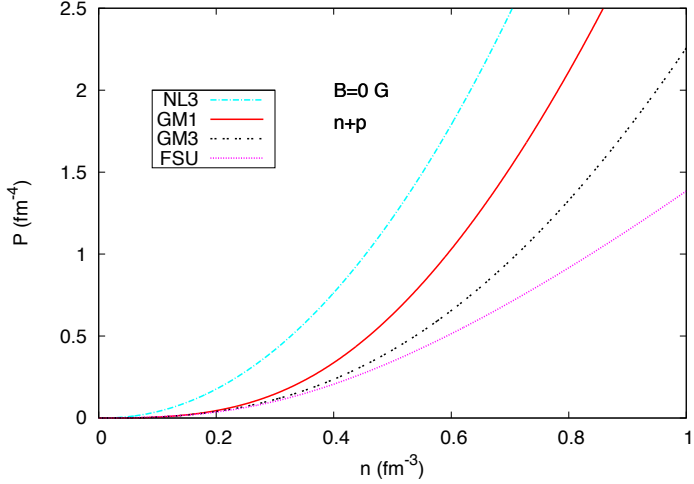
$$\sum_b q_b n_b^v + \sum_l q_l n_l^v = 0. \quad (2.41)$$

Após o evento cataclísmico da supernova, a estrela incorre em um resfriamento muito rápido e o decaimento- $\beta$  tem um papel importante nesse processo. A estrela desleptoniza e depois esfria [34, 35, 36].

## 2.3 ANÁLISE DOS EFEITOS DA INCLUSÃO DO TERMO $\Lambda_\omega$ EM MATÉRIA DE PRÓTONS E NÊUTRONS

As inclusões dos termos de auto-interação vetorial isovetorial ( $\frac{1}{4!} \xi g_\omega^4 (\omega_\mu \omega^\mu)^2$ ) e do termo misto vetorial isoescalar-isovetorial ( $\Lambda_\omega (g_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu) (g_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu)$ ) [37] à lagrangiana ocorrem com a intenção de restringir e tornar mais realistas as equações de estado para a matéria nuclear a altas densidades.

Figura 2 – Matéria de nêutrons e prótons em equilíbrio- $\beta$ , com  $B = 0$  G, para as parametrizações NL3 (azul claro), FSU (rosa), GM1 (vermelho) e GM3 (preto).

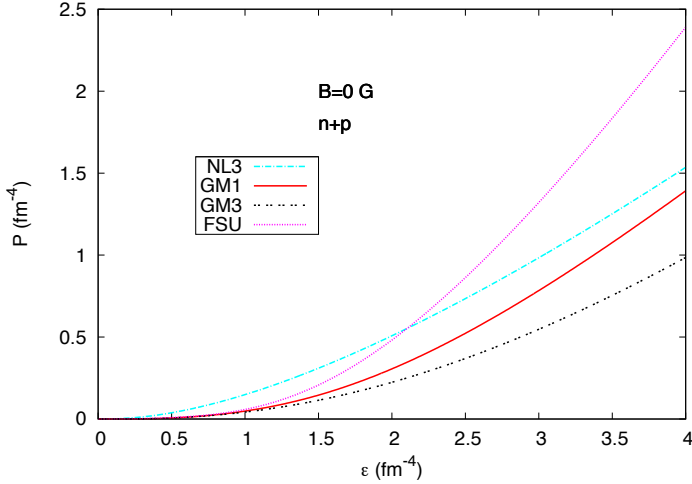


Parametrizações como NL3, GM1 e GM3 não consideram os efeitos das inclusões desses termos, porém o controle sobre a dependência da equação de estado com a densidade, fornecido pelo fator ( $\xi$ ), pode nos dar restrições importantes sobre o comportamento da matéria nuclear a altas densidades. Esse parâmetro suaviza a equação de estado em densidades intermediárias e pode ser modificado para reproduzir as massas máximas de estrelas de nêutrons. Em [38] são apresentados resultados que demonstram ser possível construir modelos com diferentes valores de ( $\xi$ ) que reproduzem as mesmas propriedades observadas a densidades nucleares, porém obtendo massas solares que se diferenciam por até uma unidade solar.

Por outro lado, a inclusão do fator ( $\Lambda_\omega$ ) ocorre com a intenção de controlar a dependência da energia de simetria com a densidade bariônica.

Na figura (2) vemos o efeito de suavização do termo ( $\Lambda_\omega$ ). A parametrização FSU aparece como a mais suave das equações de estado, já NL3 apresenta a curva mais endurecida. Na figura (3) podemos ver como o controle sobre a densidade de energia ocorre na parametrização FSU, através da inclusão do termo ( $\Lambda_\omega$ ). A baixas densidades esse

Figura 3 – Matéria de nêutrons e prótons em equilíbrio- $\beta$ , com  $B = 0$  G, para as parametrizações NL3 (azul claro), FSU (rosa), GM1 (vermelho) e GM3 (preto).



termo mantêm o caráter suave da equação de estado, porém com o aumento da densidade a curva para FSU cruza aquela de NL3. Veremos mais a frente, figura (4), que esse comportamento gerará uma energia de simetria menor do que aquela alcançada com NL3.

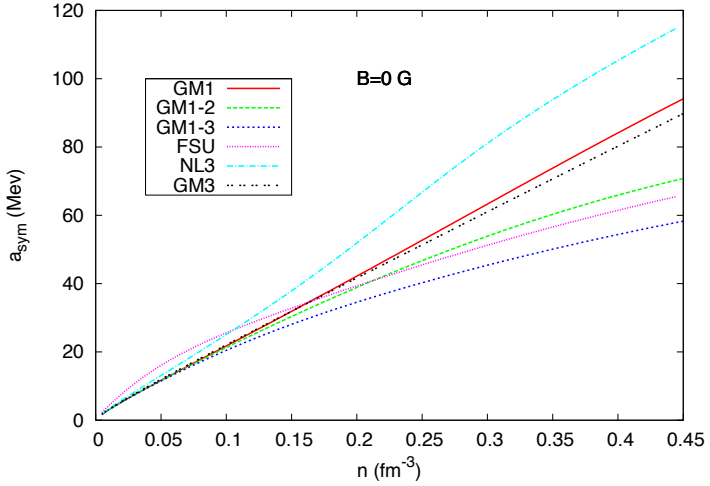
Nesse trabalho investigamos os efeitos da inclusão de campos magnéticos na energia de simetria com as parametrizações NL3, GM1, GM3 e FSU. Também estudamos as parametrizações que diferem de GM1 apenas pelo termo  $(\Lambda_\omega)$  e que chamamos de GM1-2, com a inclusão de  $(\Lambda_\omega=0.01)$ , e GM1-3, com a inclusão de  $(\Lambda_\omega=0.03)$ .

### 2.3.1 A energia de simetria e sua inclinação

A matéria nuclear assimétrica [39] é importante tanto em estudos teóricos, quanto experimentais, especialmente aqueles interessados na descrição da matéria estelar de estrelas compactas, pois as restrições que seus estudos podem prover às equações de estado a altas densidades, nos ajudam a entender a física por trás desses objetos [40]. Uma dessas restrições, apoiada por estudos experimentais, teóricos e observacionais

é uma forte correlação entre a energia de simetria e o raio da estrela [41]. Faremos aqui um estudo a respeito do comportamento da energia de simetria e de sua inclinação não apenas à densidade de saturação, mas ao longo da densidade bariônica.

Figura 4 – Energia de simetria em função da densidade bariônica, para parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3, FSU, NL3 e GM3.



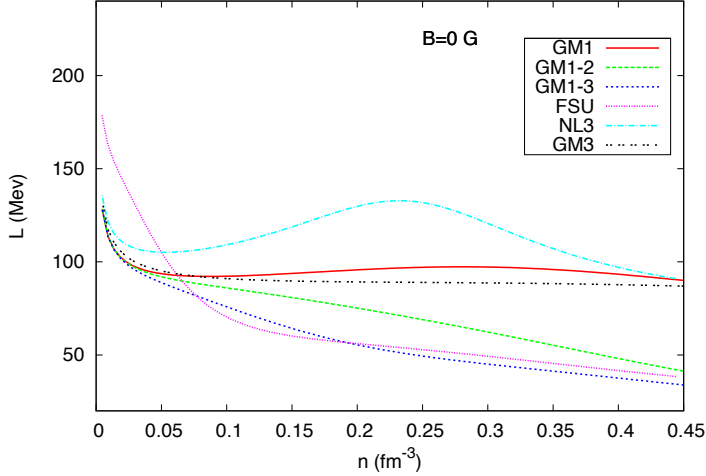
A energia de simetria é uma quantidade relacionada à assimetria entre prótons e nêutrons, na equação de estado da matéria nuclear. É uma importante quantidade tanto para físicos nucleares quanto para astrofísicos e é extremamente importante para o entendimento da estrutura das estrelas de nêutrons e sua composição [42]. A energia de simetria é definida da seguinte forma [43]:

$$a_{sym} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E/A}{\partial t^2}, \quad (2.42)$$

em que  $t = \frac{n_n - n_p}{n_p + n_n}$  é o parâmetro de assimetria. Na figura (4) apresentamos nossas curvas para a energia de simetria de matéria nuclear, em função da densidade bariônica, para diferentes parametrizações.

A inclinação da energia de simetria está relacionada com propriedades da matéria nuclear, tais como a pele de nêutrons, *neutron*

Figura 5 – Inclinação da energia de simetria em função da densidade bariônica, para parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3, FSU, NL3 e GM3.



*dripline*, energia de ligação e densidade de transição núcleo-crosta [44]. Estudamos os efeitos de campos magnéticos fortes sobre a energia de simetria e sua inclinação. A inclinação da energia de simetria é definida como:

$$L = 3n_0 \frac{\partial a_{sym}}{\partial n}, \quad (2.43)$$

em que  $n_0$  é a densidade de saturação nuclear.

Na figura (5) apresentamos nossas curvas para a inclinação da energia de simetria de matéria nuclear, em função da densidade bariônica, para diferentes parametrizações.

Vemos que a inclusão do termo  $(\Lambda_\omega)$  suavizou a energia de simetria das parametrizações GM1-2 e GM1-3 em relação àquela de GM1. Em relação a FSU, GM1-2 passa a apresentar valores maiores por volta de  $n \approx 0.2 \text{ fm}^{-3}$ , mas GM1-3 mostra-se mais suave para todas as densidades. Quando analisamos as inclinações, vemos que a partir de  $n \approx 0.2 \text{ fm}^{-3}$  curva para GM1-3 torna-se mais suave que a curva para FSU, o que não acontece em nenhum momento para GM1-2.

## 2.4 AS RELAÇÕES MASSA-RAIO

Na introdução fizemos uma pequena descrição das condições de formação de uma estrela de nêutrons, porém as condições de estabilidade dessas estrelas eram um mistério nas primeiras décadas do século *XX*, devido às dificuldades matemáticas geradas pelas distribuições de fontes de energia no interior das estrelas e sua dependência com as condições físicas. Em 1932 Landau [45] propôs a investigação da natureza física de uma quantidade de matéria que não possuísse fontes de energia, com isso ele esperava encontrar um caminho para o entendimento do caso mais geral ao se levar em conta a geração de energia. Em seu trabalho Landau mostra que para um modelo de gás de Fermi degenerado uma configuração de equilíbrio estável é impossível para massas maiores que um valor crítico, mostrando que o colapso é inevitável. Uma grande questão levantada era se Landau considerou os efeitos relativísticos sobre a estrutura estelar ou se apenas utilizou a teoria gravitacional Newtoniana.

É entendido que a formulação Newtoniana para a estrutura estelar só pode ser aplicada para estrelas cujas massas não provocam efeitos relativísticos significantes, que é o caso das anãs-brancas. Porém para estrelas de nêutrons os efeitos relativísticos [6] não podem ser desprezados e a formulação relativística deve ser utilizada. Em 1939 Oppenheimer e Volkoff [46] apresentaram um trabalho em que discutem sobre o assunto, e soluções para configurações de equilíbrio foram debatidas por Tolman em [47]. Essas equações ficaram conhecidas com as equações de Tolman, Oppenheimer e Volkoff (TOV).

Embora as soluções para a TOV impliquem em uma configuração estelar de equilíbrio hidrostático, isso não significa necessariamente que há estabilidade estelar<sup>4</sup>. Esse equilíbrio pode corresponder a valores de máximo ou de mínimo de densidade de energia em relação à contração ou dilatação estelar, o interessante é que esses máximos e mínimos correspondem às estrelas de nêutrons e às anãs brancas, respectivamente.

As equações de estado devem respeitar o *princípio de Le Châtelier*,<sup>2</sup> essa é uma condição de estabilidade microscópica da matéria estelar descrita por  $dP/dn > 0$ . Suponha uma vibração longitudinal se propagando através da matéria estelar, ela induzirá zonas locais alternadas de alta e baixa densidade, assim como pressão. Essas regiões de altas

---

<sup>4</sup>O cálculo das equações diferenciais estruturais é extenso e pode ser encontrado no apêndice E.

<sup>2</sup>“Qualquer inhomogeneidade que de alguma forma possa se desenvolver em um sistema deve induzir um processo que tende a erradicar essa inhomogeneidade” [48].

densidade e pressão tenderão a expandir-se, contraindo as regiões de baixa densidade, com isso o princípio de Le Chatelier garante que essa expansão restaurará o sistema, tornando a matéria estelar novamente homogênea [48]. Em outras palavras, é necessário que a pressão seja uma função monotonamente não decrescente da densidade, isso implica que não haja colapso espontâneo de matéria. Devido ao princípio de Le Chatelier, entende-se que para prover a massa máxima a equação de estado deve ser aquela que maximiza também a velocidade de propagação dessas vibrações longitudinais a cada valor de densidade (velocidade do som na matéria).

Porém, a maximização da velocidade sonora na matéria estelar deve manter o *princípio da causalidade*, ou seja, a velocidade de propagação de qualquer instabilidade que venha a ocorrer na matéria estelar em direção à superfície deve ser menor que a velocidade da luz. Dessa condição deriva a expressão  $v^2 = dP/d\varepsilon \leq 1$  [12].

Em 1972, Rhoades e Ruffini [49] publicaram um artigo em que levam em consideração os efeitos relativísticos apresentados acima em suas equações de estado e mostraram que a massa máxima para uma configuração de equilíbrio de uma estrela de nêutrons não pode ultrapassar o valor de  $3.2 M_{\odot}$ .

Apresentamos aqui as expressões finais, derivadas a partir da solução de Schwarzschild para um corpo esféricamente simétrico composto por matéria isotrópica em equilíbrio hidrostático. para a massa:

$$M(r) = 4\pi \int_0^R r'^2 dr' \varepsilon(r'), \quad (2.44)$$

pressão e número bariônico, como função do raio:

$$\begin{aligned} \frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{G\varepsilon(r)M(r)}{r^2} \left[ 1 + \frac{P(r)}{\varepsilon(r)} \right] \\ &\times \left[ 1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)} \right] \left[ 1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\frac{dA(r)}{dr} = 4\pi n_b^v r^2 \left( 1 - \frac{2GM(r)}{rc^2} \right). \quad (2.46)$$

Essas equações derivam de condições de equilíbrio hidrostático entre as forças gravitacionais e a pressão interna, gerada pela estrela [50].



## 2.5 A INCLUSÃO DE HÍPERONS

Com o aumento progressivo da densidade bariônica, o nível de Fermi dos nucleons cresce até valores acima daqueles limites de massa das partículas mais pesadas. Dessa maneira, a energia total é reduzida ao compartilharmos o número bariônico por um número maior de espécies de bárions. Esse comportamento é garantido tanto pela conservação do número bariônico, quanto pela violação da estranheza pela interação fraca, além do princípio de exclusão de Pauli. O mesmo mecanismo é também responsável pela redução da pressão da matéria hadrônica. Tomando:

$$P = n^2 \left[ \frac{\partial \varepsilon / n}{\partial n} \right] = n^2 \left[ \frac{1}{n} \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} - \frac{\varepsilon}{n} \frac{1}{n} \right] = n \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} - \varepsilon, \quad (2.47)$$

usando a igualdade:

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right) / \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right), \quad (2.48)$$

temos que:

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right) / \left( \frac{P + \varepsilon}{n} \right) = \left( \frac{n}{P + \varepsilon} \right) \frac{\partial P}{\partial n}. \quad (2.49)$$

Mas é uma condição de microestabilidade que a pressão aumente com a densidade, o que implica que  $\frac{\partial P}{\partial n} \geq 0$ , o que pela (2.49), significa que  $\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \geq 0$ . Isso tende a suavizar as equações de estado, o que pode ser visto a seguir, na figura (6). Essa tendência implica em massas estelares máximas menores, como veremos adiante.

Outra propriedade interessante das constantes de acoplamento dos híperons é que ao variar seu valor, alteramos os processos de criação de novos híperons. Comparando as curvas para  $X_\sigma = 0.6$ ,  $X_\sigma = 0.7$  e  $X_\sigma = 0.8$ , notamos pela figura (7) que não há a criação dos híperons  $\Xi^-$  e  $\Xi^0$ . Porém eles estão presentes nas curvas com acoplamento  $X_\sigma = 0.7$ , como podemos ver pela figura (8). Na figura (9), notamos que ao aumentar o acoplamento para  $X_\sigma = 0.8$  adiantamos a produção dos partículas  $\Xi^-$  e  $\Xi^0$ .

Figura 6 – Equações de estado para matéria de nucleons (vermelho) e matéria hiperônica, com  $B = 0$  G e três valores para a constante de acoplamento  $X_\sigma = 0.6$  (rosa),  $X_\sigma = 0.7$  (azul escuro) e  $X_\sigma = 0.8$  (verde).

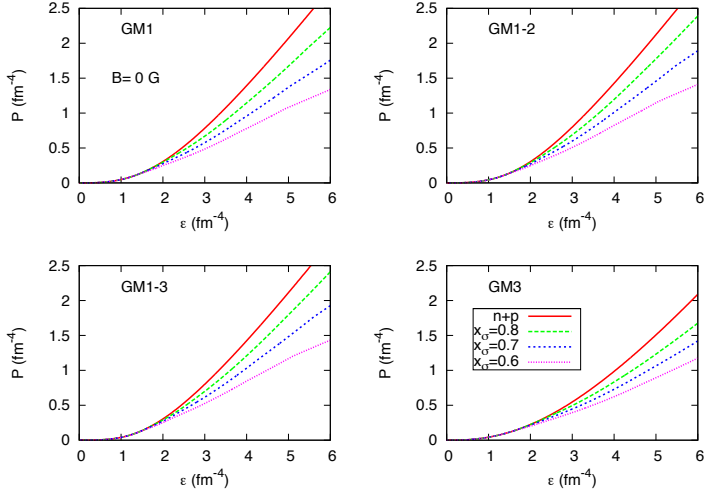


Figura 7 – Frações de partículas para matéria hiperônica, com parametrização GM1,  $B = 0$  G e  $X_\sigma = 0.6$ .

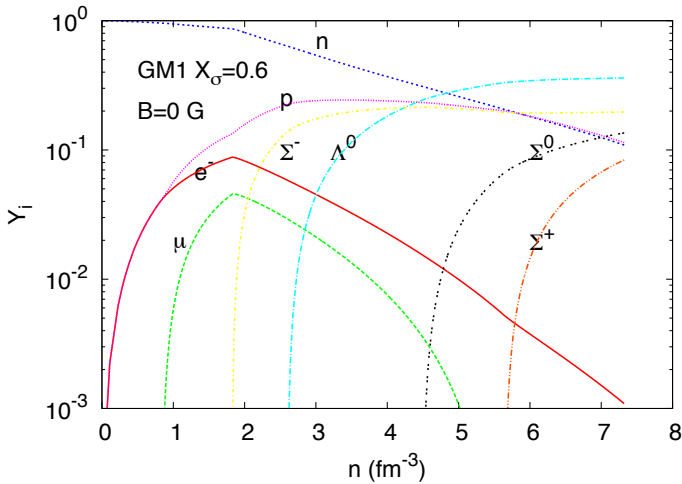


Figura 8 – Frações de partículas para matéria hiperônica, com parametrização GM1,  $B = 0$  G e  $X_\sigma=0.7$

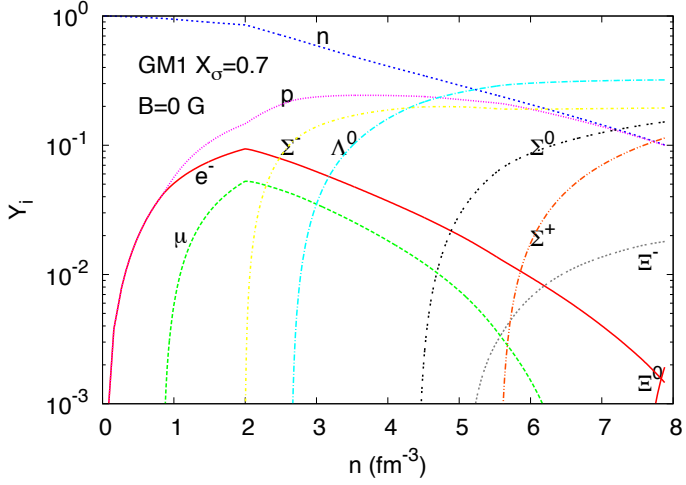
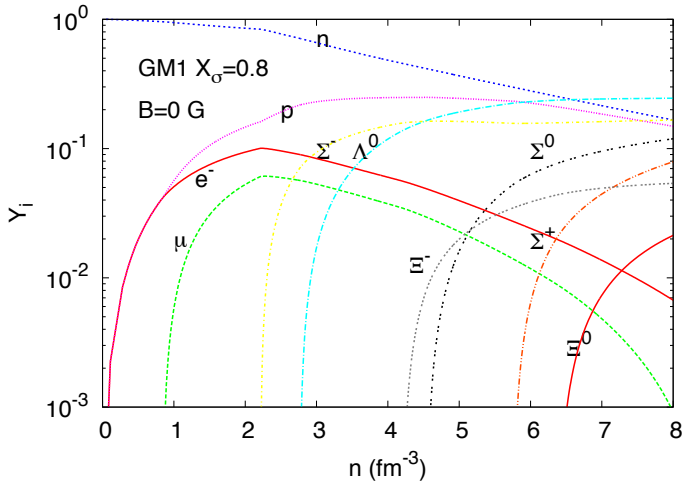


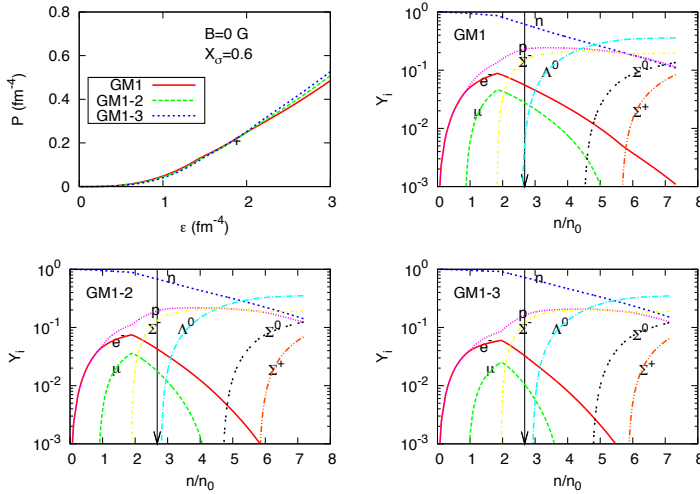
Figura 9 – Frações de partículas para matéria hiperônica, com parametrização GM1,  $B = 0$  G e  $X_\sigma=0.8$



### 2.5.1 Análise dos efeitos da inclusão do termo $\Lambda_\omega$ em matéria hiperônica

Como vimos anteriormente, a inclusão do termo  $\Lambda_\omega$  tem a propriedade de suavizar as equações de estado a baixas densidades, porém à medida que a densidade bariônica aumenta e novas partículas são geradas, notamos que esse comportamento se inverte e o parâmetro começa a endurecer as equações de estado. Esse comportamento é observado quando plotamos a pressão em função da densidade de energia e depende da constante de acoplamento utilizada.

Figura 10 – Comparativo para a inclusão do fator  $\Lambda_\omega$  nas curvas  $B = 0$  G das parametrizações GM1 ( $\Lambda_\omega=0$ ), GM1-2 ( $\Lambda_\omega=0.01$ ) e GM1-3 ( $\Lambda_\omega=0.03$ ), para  $X_\sigma=0.6$ , e as respectivas frações de partículas.



O que notamos foi que as equações de estado para as parametrizações GM1-2 e GM1-3, que a baixas densidade são mais suaves, cruzam a equação de estado para GM1 e a densidade bariônica onde esse cruzamento ocorre é alterada com o acoplamento escolhido, sendo maior para acoplamentos maiores. Nas figuras (10), (11) e (12) apresentamos as equações de estado e as frações de partículas para cada parametrização e três valores para o acoplamento  $X_\sigma$ . Na figura (13) apresentamos todas as equações de estado, agrupadas por constante de acoplamento,

evidenciando a evolução dos pontos onde os cruzamentos acontecem.

As cruzes  $+$  nas equações de estado, representam as densidades de energia e as flechas  $\downarrow$  nas frações de partículas, representam as densidades bariônicas onde as curvas GM1-2 e GM1-3 cruzam a curva GM1 e tornam-se mais duras, causando assim efeitos nas massas máximas, raios e densidades centrais de energia gerados.

Observando a figura (10), curvas para acoplamento  $X_\sigma = 0.6$ , notamos que o ponto  $+$  de densidade de energia e pressão onde ocorrem os cruzamentos das curvas se dá por volta de  $(1.83, 0.21) (fm^{-4})$ . A densidade bariônica correspondente a esse ponto  $\downarrow$  é de  $2.68 n_0$ , em que  $n_0 = 0.153 fm^{-3}$ . Com esse ponto fixo nos gráficos de fração de partículas para as diferentes variações de GM, notamos que à medida que o valor do parâmetro  $\Lambda_\omega$  aumenta, de  $\Lambda_\omega = 0$  para GM1,  $\Lambda_\omega = 0.01$  para GM1-2 até  $\Lambda_\omega = 0.03$  para GM1-3, as densidades onde os híperons do octeto bariônico começam a ser gerados vão sendo deslocadas para valores mais altos. Em GM1,  $2.68 n_0$  marca a densidade exata onde o híperon  $\Lambda^0$  começa a ser formado. Mas em GM1-2 e GM1-3 ele só aparece posteriormente. O mesmo ocorre com  $\Sigma^0$  e  $\Sigma^+$ , após  $\approx 4 n_0$ . Devido ao baixo valor do acoplamento, não há a formação dos híperons  $\Xi^0$  e  $\Xi^-$ .

Figura 11 – Comparativo para a inclusão do fator  $\Lambda_\omega$  nas curvas  $B = 0$  G das parametrizações GM1 ( $\Lambda_\omega=0$ ), GM1-2 ( $\Lambda_\omega=0.01$ ) e GM1-3 ( $\Lambda_\omega=0.03$ ), para  $X_\sigma = 0.7$ , e as respectivas frações de partículas.

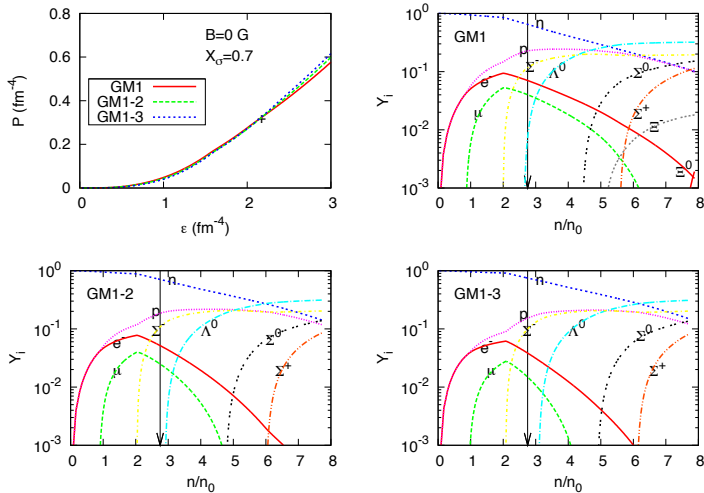
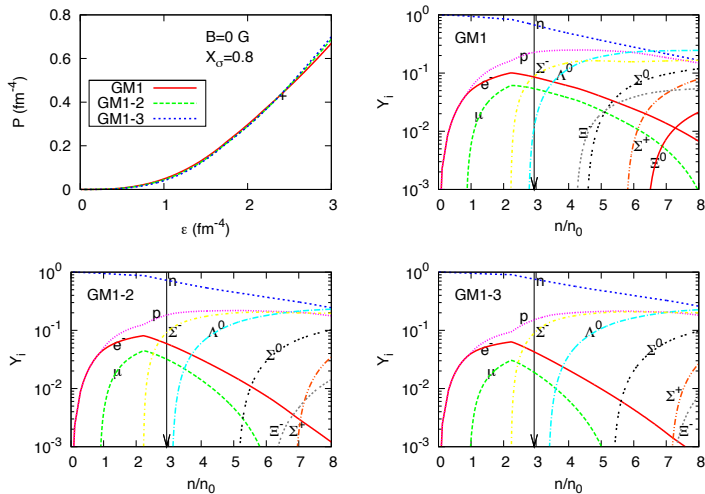


Figura 12 – Comparativo para a inclusão do fator  $\Lambda_\omega$  nas curvas  $B = 0$   $G$  das parametrizações GM1 ( $\Lambda_\omega=0$ ), GM1-2 ( $\Lambda_\omega=0.01$ ) e GM1-3 ( $\Lambda_\omega=0.03$ ), para  $X_\sigma = 0.8$ , e as respectivas frações de partículas.

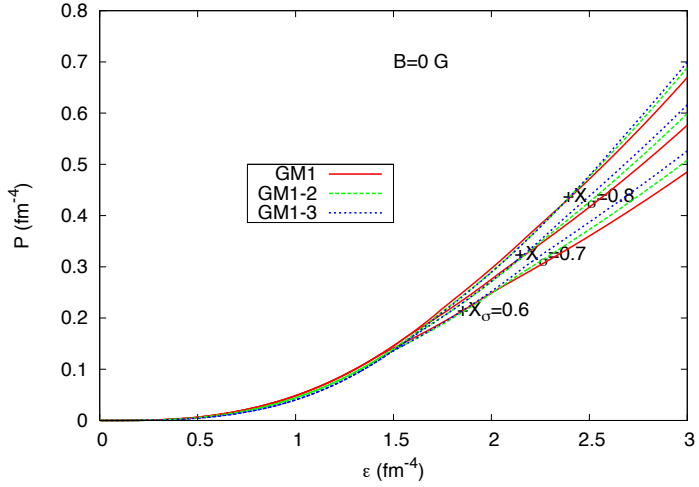


O mesmo comportamento repete-se para  $X_\sigma = 0.7$ , figura (11), aqui o ponto de cruzamento das equações de estado é  $(2.12, 0.32) fm^{-4}$  e a densidade bariônica correspondente é de  $2.75 n_0$ . É interessante notar que em GM1 chega a ocorrer a criação dos híperons  $\Xi^-$  e  $\Xi^0$ , o que não ocorre nas demais parametrizações. Esse é um impacto muito interessante, pois demonstra claramente a influência do parâmetro  $\Lambda_\omega$  na formação de partículas. Quando avaliamos a figura (12), cujo acoplamento considerado é de  $X_\sigma = 0.8$ , notamos que o cruzamento das equações de estado ocorre em  $(2.36, 0.44) fm^{-4}$  e a densidade bariônica correspondente é de  $2.94 n_0$ , notamos também apenas em GM1 a dupla  $\Xi^-$  e  $\Xi^0$  é formada, em GM1-2 e GM1-3 não há formação de  $\Xi^0$ .

Na figura (13) apresentamos o conjunto de equações de estado, agrupadas por constante de acoplamento  $X_\sigma$ , o que nos dá uma noção mais clara das densidades onde as curvas GM1-2 e GM1-3 cruzam as curvas GM1.

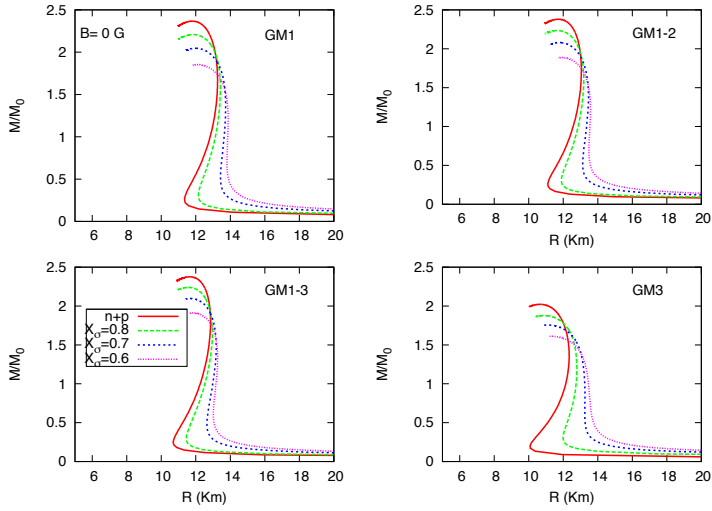
Na figura (14) apresentamos os efeitos causados pela inclusão de híperons às relações de massa-raio. Notamos que devido à suavização causada pela introdução dos híperons às equações de estado, mostrada na figura (6), as massas máximas dessa matéria hiperônica tendem a

Figura 13 – Comparativo para a inclusão do fator  $\Lambda_\omega$  nas parametrizações GM1 ( $\Lambda_\omega=0$  - vermelho), GM1-2 ( $\Lambda_\omega=0.01$  - verde) e GM1-3 ( $\Lambda_\omega=0.03$  - azul escuro), para diferentes constantes de acoplamento  $X_\sigma$  dos híperons.



ser menores que a massa máxima encontrada para a matéria de nucleons (n+p). Além disso, acoplamentos menores geram massas máximas menores.

Figura 14 – Relações de massa-raio para matéria de nucleons (vermelho) e matéria hiperônica, com três valores para a constante de acoplamento  $X_\sigma = 0.6$  (rosa),  $X_\sigma = 0.7$  (azul escuro) e  $X_\sigma = 0.8$  (verde).





## 2.6 O CAMPO MAGNÉTICO DEPENDENTE DA DENSIDADE.

O maior campo magnético observado na superfície de uma estrela é da ordem de  $10^{15} \text{ G}$ , porém muito pouco ainda é conhecido a respeito da natureza e da magnitude desses campos no interior das estrelas. Em nosso trabalho vamos considerar um campo magnético cuja magnitude aumenta da superfície para o centro da estrela, tomando valores entre  $10^{15}$  a  $3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ . Dessa forma passamos a considerar os efeitos do campo magnético dependente da densidade aplicado à matéria hadrônica que será usada para descrever uma estrela, definindo [51]:

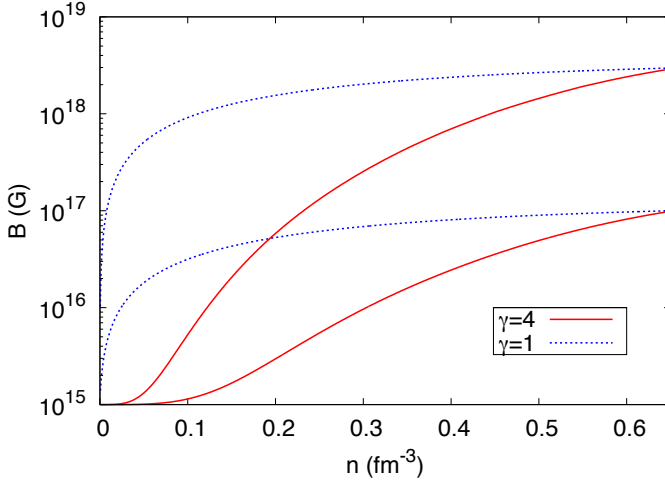
$$B\left(\frac{n}{n_0}\right) = B_{surf} + B_0 \left[ 1 - \exp\left(-\beta\left(\frac{n}{n_0}\right)\right)^\gamma \right], \quad (2.50)$$

onde  $n_0$  é a densidade de saturação nuclear,  $B_{surf}$  é o campo magnético na superfície, tomado como  $10^{15} \text{ G}$ ,  $B_0$  é o campo magnético para grandes valores de densidade. Os parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  ajustam a dependência do campo magnético com a densidade. Consideramos um decaimento rápido, com  $\gamma = 4.00$  and  $\beta = 0.006$  e um decaimento lento, com  $\gamma = 1.00$  and  $\beta = 0.550$ . Essas curvas podem ser vistas na figura (15).

Nesse trabalho apresentaremos nossos resultados para o estudo do comportamento da matéria hadrônica para dois casos de influência magnética. Em um deles consideramos um campo magnético fixo (FIX)  $B_0$ , aplicado a todas as equações no intervalo (2.15) e (2.22). No outro, um campo magnético variável (VAR)  $B(\frac{n}{n_0})$  dependente da densidade, com a forma da equação (2.50), é aplicado às equações desse intervalo. Os dois casos consideram o termo  $(\frac{B^2}{2})$  com um campo magnético dependente da densidade na equação (2.32), uma vez que esse termo se torna muito grande para campos magnéticos fixos e por isso essas expressões para a densidade de energia e pressão totais, tornam-se:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_m + \frac{\left(B\left(\frac{n}{n_0}\right)\right)^2}{2}, \quad P_t = P_m + \frac{\left(B\left(\frac{n}{n_0}\right)\right)^2}{2}. \quad (2.51)$$

Figura 15 – Campos magnéticos dependentes da densidade  $B_0 = 10^{17} G$  e  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} G$ , definidos como decaimento lento ( $\gamma = 1$ ,  $\beta = 0.550$ ) curvas em azul escuro e como decaimento rápido ( $\gamma = 4$ ,  $\beta = 0.006$ ) curvas em vermelho.

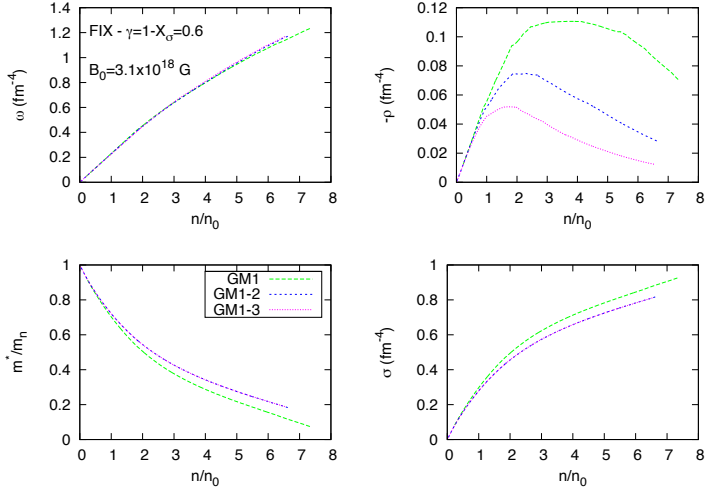


## 2.7 A INFLUÊNCIA DO TERMO $\Lambda_\omega$ NOS CAMPOS MESÔNICOS

A inclusão do termo  $\Lambda_\omega$  tem importantes implicações tanto nas equações de estado quanto nas relações de massa raio geradas, como veremos a seguir, mas também nas curvas dos campos mesônicos. A seguir apresentamos nossos resultados a respeito dos comparativos entre as parametrizações GM1 ( $\Lambda_\omega=0$ ), GM1-2 ( $\Lambda_\omega=0.01$ ) e GM1-3 ( $\Lambda_\omega=0.03$ ), em termos das massas efetivas e dos campos  $\sigma$ ,  $\omega$  e  $\rho$ , todos em função da densidade de saturação  $n_0$ .

Nas figuras (16) e (17) apresentamos as curvas (FIX) e (VAR) respectivamente, para as parametrizações GM1, GM1-2 e GM1-3, com  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} G$ , decaimento lento  $\gamma = 1$  e constante de acoplamento  $X_\sigma = 0.6$ . Notamos que a inclusão do termo  $\Lambda_\omega$  altera muito pouco o campo  $\omega$ , porém as curvas do campo  $\rho$  sofrem um efeito visível de diminuição em seus valores. O campo  $\sigma$  também é afetado, notamos que as curvas GM1-2 e GM1-3 são mais suaves que aquela para GM1 e a massa efetiva do nêutron decai menos com a densidade, para as curvas

Figura 16 – Curvas (FIX) das parametrizações GM1 (verde), GM1-2 (azul escuro) e GM1-3 (rosa) para a inclusão de termo  $\Lambda_\omega$ , com constante de acoplamento  $X_\sigma = 0.6$ , campo magnético de  $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$  G e  $\gamma = 1$ .



em que o termo  $\Lambda_\omega$  é aplicado. O mesmo comportamento é encontrado para  $X_\sigma = 0.7$  e  $X_\sigma = 0.8$ .

Na figura (18) apresentamos uma comparação entre os casos (FIX) e (VAR) para a parametrização GM1, com  $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$  G, decaimento lento  $\gamma = 1$  e constante de acoplamento  $X_\sigma = 0.6$ . Notamos que embora as curvas para a massa efetiva e para os campos  $\omega$  e  $\sigma$  sejam muito parecidas, a curva (VAR) apresenta um campo  $\rho$  maior que aquele para a curva (FIX), porém essa diferença é desprezível.

Figura 17 – Curvas (VAR) das parametrizações GM1 (verde), GM1-2 (azul escuro) e GM1-3 (rosa) para a inclusão de termo  $\Lambda_\omega$ , com constante de acoplamento  $X_\sigma = 0.6$ , campo magnético de  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$  e  $\gamma = 1$ .

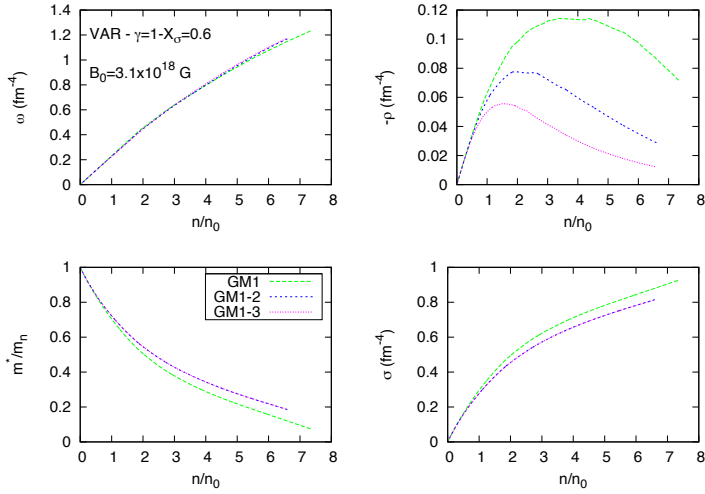
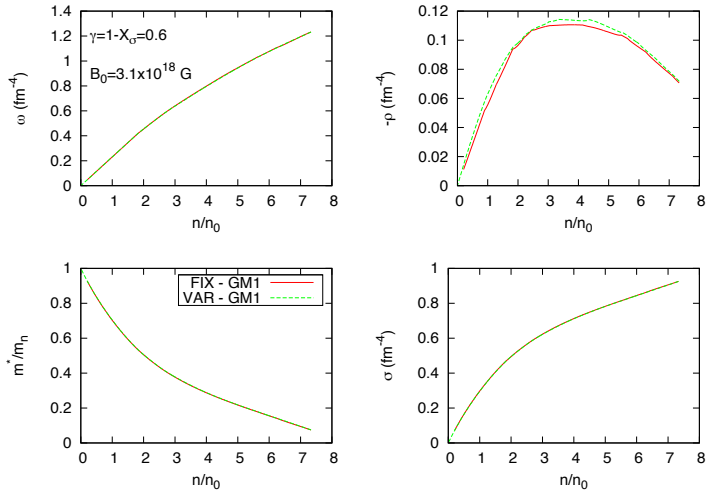


Figura 18 – Curvas (FIX) (vermelho) e (VAR) (verde) da parametrização GM1, com constante de acoplamento  $X_\sigma = 0.6$ , campo magnético de  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$  e  $\gamma = 1$ .



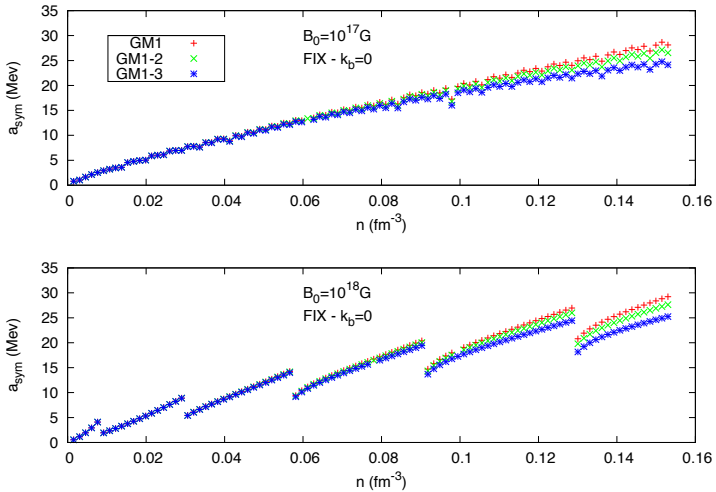


### 3 OS EFEITOS DO CAMPO MAGNÉTICO NA ENERGIA DE SIMETRIA E EM SUA INCLINAÇÃO

Recentes trabalhos apresentaram restrições às equações de estado a altas densidades, usando dados observacionais obtidos de objetos compactos [52, 53, 54]. Modelos teóricos são normalmente ajustados utilizando propriedades da matéria nuclear à densidade de saturação. Apresentamos aqui um estudo com a inclusão de campos magnéticos da ordem de  $B_0 = 10^{17} \text{ G}$  e  $B_0 = 10^{18} \text{ G}$ , estudamos os efeitos da inclusão termo  $\Lambda_\omega$ , das correções no momento magnético anômalo e das diferentes configurações para a aplicação dos campos magnéticos à energia de simetria e sua inclinação.

Como vimos anteriormente a energia de simetria está ligada à assimetria entre prótons e nêutrons nas equações de estado e possui uma correlação muito forte com os raios das estrelas de nêutrons. Vamos apresentar aqui alguns resultados a respeito.

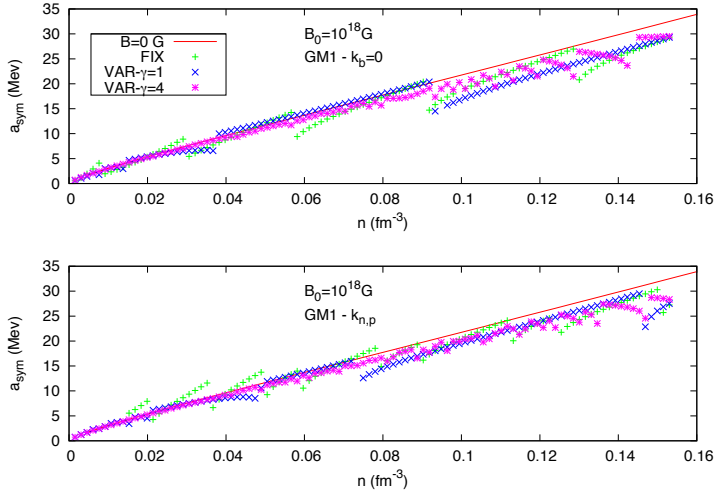
Figura 19 – Energias de simetria das parametrizações GM1 (vermelho), GM1-2 (verde) e GM1-3 (azul escuro). Curvas (FIX), com campos magnéticos de  $B_0 = 10^{17}$  (painel superior) e  $B_0 = 10^{18}$  (painel inferior) são aplicados e não há a inclusão de momentos magnéticos anômalos.



Na figura (19) apresentamos os efeitos da inclusão do termo  $\Lambda_\omega$

às equações do caso (FIX). Foram utilizadas as parametrizações GM1 ( $\Lambda_\omega=0$ ), GM1-2 ( $\Lambda_\omega=0.01$ ) e GM1-3 ( $\Lambda_\omega=0.03$ ), os campos magnéticos  $B_0 = 10^{17} \text{ G}$  e  $B_0 = 10^{18} \text{ G}$  e nenhuma correção de momento anômalo foi incluída  $k_b = 0$ . Vimos que esse termo tende a diminuir os valores de energia de simetria, próximo da densidade de saturação. Vimos também que a inclusão de campos magnéticos mais fortes intensifica os efeitos da quantização de Landau.

Figura 20 – Energias de simetria da parametrização GM1. Curvas  $B = 0 \text{ G}$  (vermelho), (FIX) (verde), (VAR- $\gamma = 1$ ) (azul escuro) e (VAR- $\gamma = 4$ ) (rosa) com campo magnético de  $B_0 = 10^{18} \text{ G}$ , sem (painel superior) e com (painel inferior) a inclusão de momentos magnéticos anômalos.



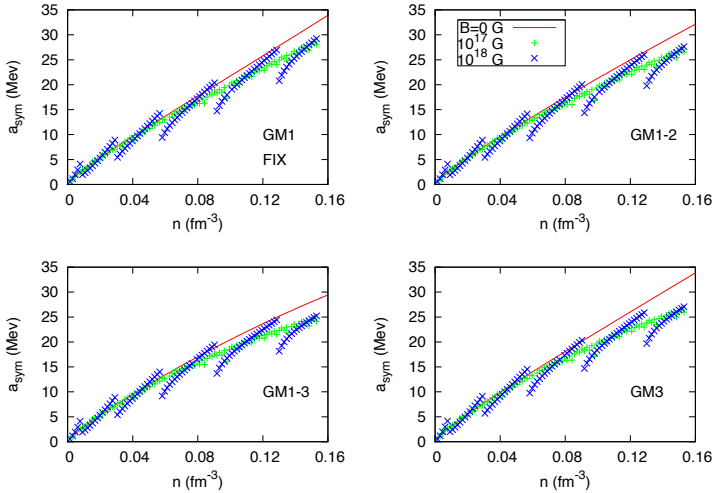
A figura (20) mostra um comparativo entre as energias de simetria da parametrização GM1. Apresentamos as curvas  $B = 0 \text{ G}$ , como referência, o caso (FIX), e os casos (VAR- $\gamma = 1$ ) e (VAR- $\gamma = 4$ ), todos com campo magnético de  $B_0 = 10^{18} \text{ G}$ , com e sem a inclusão de momentos magnéticos anômalos. Aqui é possível notar com mais clareza os efeitos da introdução dos momentos magnéticos anômalos aos nêutrons e prótons, fazendo uma comparação com todos os casos concebidos para a introdução do campo magnético.

Na figura (21) mostramos como o comportamento da energia de simetria, dada pela equação (2.42), varia com a densidade bariônica quando diferentes intensidades de campos magnéticos são aplicadas.



Utilizamos as parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3 e sem a inclusão do momento magnético anômalo. Notamos que mesmo para intensidades menores de campo magnético,  $B_0 = 10^{17} \text{ G}$ , os efeitos da quantização de Landau aparecem como pequenas descontinuidades nas curvas. Quando o campo magnético aplicado é de  $B_0 = 10^{18} \text{ G}$ , observamos que essas descontinuidades se tornam maiores.

Figura 21 – Energia de simetria para as curvas (FIX) das parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3, para campos magnéticos  $B = 0 \text{ G}$  (vermelho)  $B_0 = 10^{17} \text{ G}$  (verde) e  $B_0 = 10^{18} \text{ G}$  (azul escuro),  $k_b = 0$ .



A inclinação da energia de simetria também é uma quantidade muito importante para o entendimento de determinadas quantidades da física nuclear tais como pele de nêutrons [55] e também da astrofísica, como a transição entre o núcleo e a crosta [56] e energia de ligação gravitacional [57]. Assim como a energia de simetria, os estudos a respeito do comportamento da inclinação desta, quando submetida a campos magnéticos, também não são muito conclusivos. Dessa maneira apresentamos aqui alguns resultados a respeito.

Nas figuras (22), (23) e (24), mostramos como o comportamento da inclinação da energia de simetria, dada pela equação (2.43), varia com a densidade bariônica quando diferentes intensidades de campos magnéticos são aplicados, utilizamos as parametrizações GM1, GM1-

2, GM1-3 e GM3. Apresentamos esses resultados para curvas (FIX), (VAR- $\gamma = 1$ ) e (VAR- $\gamma = 4$ ), respectivamente e não há a inclusão do momento anômalo magnético.

Percebemos distribuições de pontos em volta das curvas  $B = 0$  G para os dois valores de campo magnético aplicado, sendo mais espalhadas para campos magnéticos mais altos. Essas distribuições têm origem na derivada da energia de simetria, que define a inclinação e que para a matéria nuclear sob a influência de campos magnéticos apresenta descontinuidades. Mas quando comparamos os casos (FIX) e (VAR), notamos que as distribuições do caso (VAR) tendem a recair sobre a curva não magnetizada  $B = 0$  G, especialmente o caso (VAR- $\gamma = 4$ ).

Os efeitos acima apresentados também foram notados para as parametrizações NL3 e FSU.

Figura 22 – Inclinação para as curvas (FIX) das parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3,  $k_b = 0$ , para campos magnéticos  $B = 0$  (vermelho)  $B_0 = 10^{17}$  (verde) e  $B_0 = 10^{18}$  (azul claro).

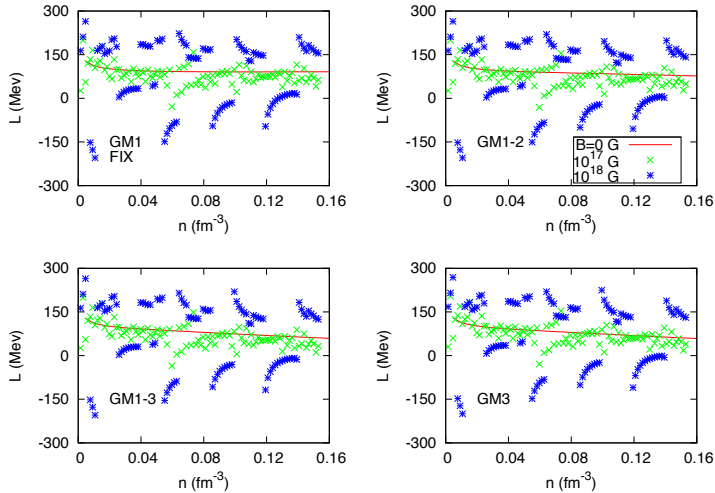


Figura 23 – Inclinação para as curvas (VAR) das parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3,  $\gamma = 1$ ,  $k_b = 0$ , para campos magnéticos  $B = 0$  (vermelho)  $B_0 = 10^{17}$  (verde) e  $B_0 = 10^{18}$  (azul escuro).

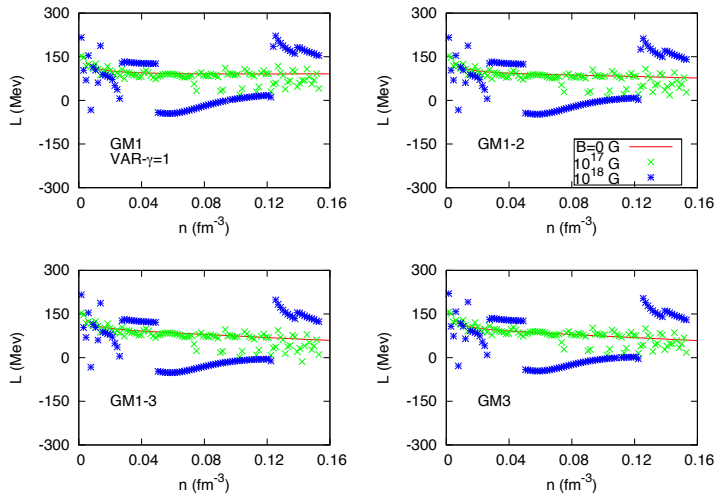
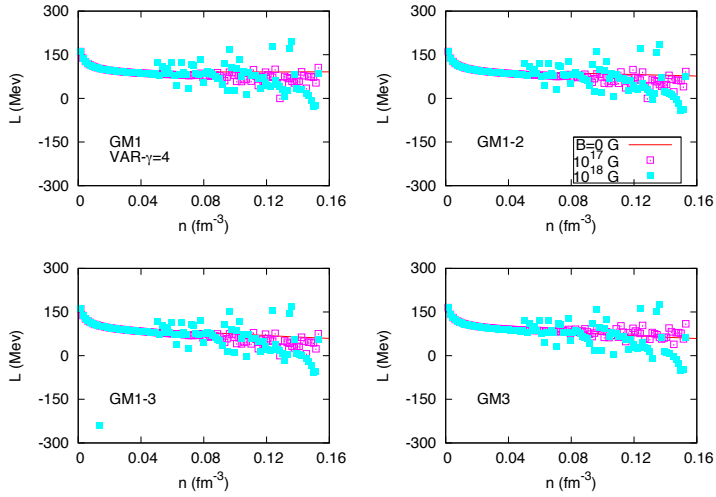


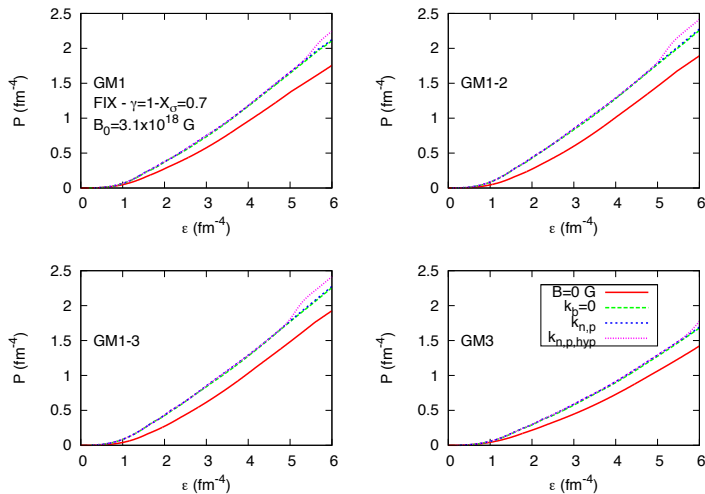
Figura 24 – Inclinação para as curvas (VAR) das parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3,  $\gamma = 4$ ,  $k_b = 0$ , para campos magnéticos  $B = 0$  (vermelho)  $B_0 = 10^{17}$  (verde) e  $B_0 = 10^{18}$  (azul escuro).



## 4 EFEITOS DO CAMPO MAGNÉTICO NAS EQUAÇÕES DE ESTADO E SUAS CONSEQUÊNCIAS NAS PROPRIEDADES ESTELARES

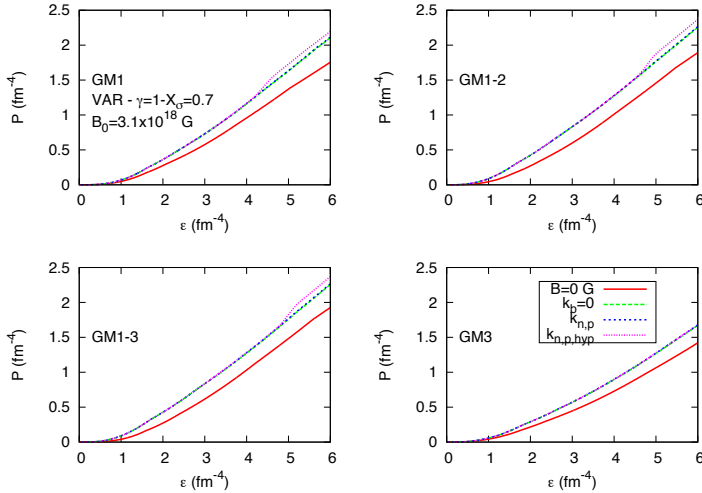
As equações de estado são ingrediente essencial para o entendimento das propriedades da matéria estelar. Através delas somos capazes de gerar as relações de massa-raio e comparar nossos resultados com os dados observacionais mais recentes. Como vimos anteriormente, quando campos magnéticos fortes são aplicados nessas equações de estado, podem criar anisotropia entre as pressões longitudinais e transversais, porém nesse trabalho, nos manteremos dentro do limite de intensidade mostrado em [32]. A seguir apresentaremos nossos resultados para as equações de estado e relações de massa-raio submetidas aos casos (FIX) e (VAR) de decaimento, também os valores de massa máxima e respectivo raio para cada acoplamento utilizado, além dos valores de densidade central de energia dos casos (FIX) e (VAR) em termos das correções de momento magnético anômalo aplicadas. Por fim comparamos nossos resultados com dados observacionais recentes

Figura 25 – Equações de estado para curvas do caso (FIX), parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3,  $\gamma = 1$ ,  $X_\sigma = 0.7$ ,  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ ,  $k_b = 0$ ,  $k_{n,p}$  e  $k_{n,p,hyp}$ .



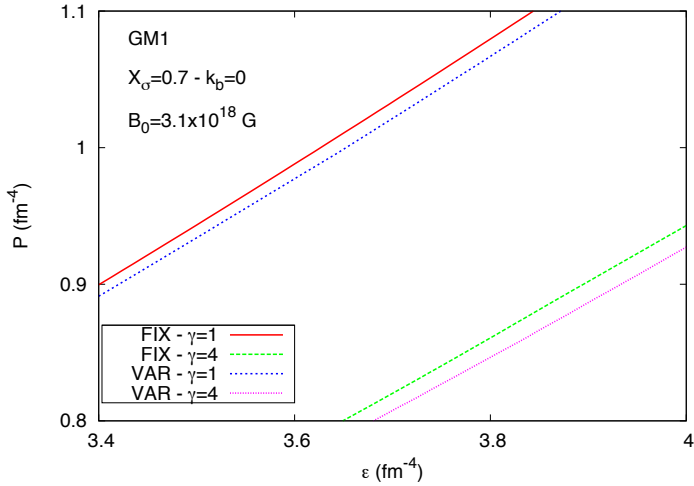
Nas figuras (25) e (26) apresentamos os efeitos causados pela inclusão dos momentos magnéticos anômalos às curvas FIX e VAR das parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3, para campos magnéticos  $B_0 = 10^{17} - 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ ,  $\gamma = 1$  e  $X_\sigma = 0.7$ . Notamos um forte endurecimento das curvas, em relação àquela para  $B = 0 \text{ G}$ . Quando comparamos as curvas em termos da inclusão dos momentos magnéticos anômalos, vemos uma diferença muito pequena entre as curvas  $k_b = 0$  e  $k_{n,p}$ , mas a altas densidades as curvas  $k_{n,p,hyp}$  se destoam das demais. Esse efeito fica bem claro para GM1, GM1-2 e GM1-3. Notamos que as curvas para FIX -  $\gamma = 1$  e VAR -  $\gamma = 1$  são muito próximas entre si e mais duras que FIX -  $\gamma = 4$  e VAR -  $\gamma = 4$ . Essa proximidade pode ser observada na figura (27), nela podemos notar que mesmo próximas, as curvas FIX são mais endurecidas tanto para  $\gamma = 1$ , quanto para  $\gamma = 4$ .

Figura 26 – Equações de estado para curvas do caso (VAR), parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3,  $\gamma = 1$ ,  $X_\sigma = 0.7$ ,  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ ,  $k_b = 0$ ,  $k_{n,p}$  e  $k_{n,p,hyp}$ .



As relações de massa-raio obtidas para os modelos teóricos são importantes para estabelecer as relações de conformidade entre esses modelos e o dados observados. Comparando nosso modelos com os vínculos observacionais existentes somos capazes de restringir os métodos utilizados, tornando-os mais realistas. Apresentaremos aqui alguns de nossos resultados teóricos e mais adiantes os compará-los-emos com

Figura 27 – Zoom do comparativo das equações de estado para curvas GM1 dos casos (FIX) e (VAR), para  $X_\sigma = 0.7$ ,  $\gamma = 1 - 4$ ,  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$  e  $k_b = 0$ .

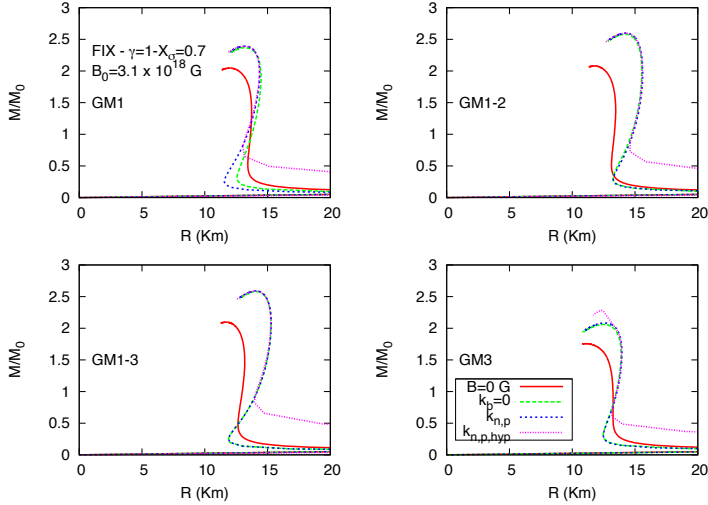


os dados observacionais mais recentes. Devido ao grande número de variáveis, apresentaremos aqui apenas algumas relações de massa-raio encontradas, correspondentes às equações de estado apresentadas. Em seguida apresentaremos outras relações, aí considerando todas as combinações, envolvendo as massas máximas, os raios correspondentes a essas massas e as densidades centrais de energia.

As figuras (28) e (29) apresentam as relações de massa-raio para curvas (FIX) e (VAR), com decaimentos  $\gamma = 1$ , acoplamentos  $X_\sigma = 0.7$ , com as três condições de inclusão do momento magnético anômalo  $k_b = 0$ ,  $k_{n,p}$  e  $k_{n,p,hyp}$  e campos magnéticos  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ . As diferenças entre os casos FIX e VAR são muito pequenas, como pode-se esperar pela figura (27). Vemos que tanto para (FIX) quanto para (VAR) GM1 apresenta massas máximas pouco menores que duas vezes e meia a massa solar. GM1-2 e GM1-3 apresentam massas máximas da ordem de duas vezes e meia. Para GM3 as massas máximas para o campo mais forte são da ordem de duas massas solares.

Na figura (30), apresentamos as massas máximas correspondentes a cada constante de acoplamento aplicada. As massas são para o campo magnético  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ , sem nenhum momento magnético

Figura 28 – Relação de massa-raio para uma curvas do caso (FIX) e decaimento lento  $\gamma = 1$ , com campo magnético  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ , constante de acoplamento  $X_\sigma = 0.7$  e três consições de inclusão de momento magnético anômalo,  $k_b = 0$ ,  $k_{n,p}$  e  $k_{n,p,hyp}$ .

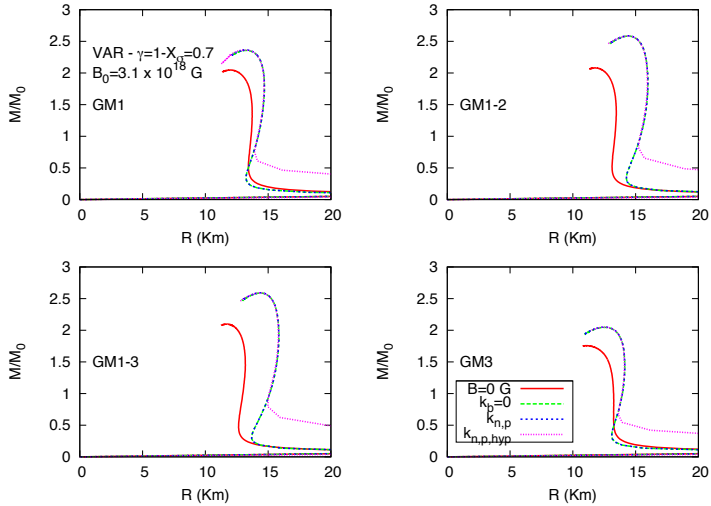


anômalos incluído ( $k_b = 0$ ) e são considerados os casos (FIX -  $\gamma = 1 - 4$ ) e (VAR -  $\gamma = 1 - 4$ ) e os valores para as respectivas massas  $B = 0 \text{ G}$ , usados como referências. Notamos que as massas máximas para  $\gamma = 1$ , tanto para o caso FIX quanto VAR, apresentam as maiores valores para todas as parametrizações. Para GM1 e GM3, as massas máximas para  $\gamma = 4$ , para FIX e VAR são muito parecidas com aquelas dos respectivos  $B = 0 \text{ G}$ , para todos os acoplamentos. Para GM1-2 e GM1-3, as massas máximas para esse valor de  $\gamma$  são sempre superiores àquelas encontradas para os respectivos  $B = 0 \text{ G}$ . Como já era esperado pelas figuras (6) e (14), as massas máximas tendem a aumentar com os acoplamentos aplicados.

Na figura (31), apresentamos os raios correspondentes às massas máximas para cada constante de acoplamento aplicada. Os raios são para o campo magnético  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ , sem nenhum momento magnético anômalo incluído ( $k_b = 0$ ) e são considerados os casos (FIX -  $\gamma = 1 - 4$ ) e (VAR -  $\gamma = 1 - 4$ ) e os valores para os respectivos raios  $B = 0 \text{ G}$ , usados como referências. Vemos que os raios para  $\gamma = 1$ , tanto para o caso FIX quanto VAR, são os maiores em todas as parametrizações.



Figura 29 – Relação de massa-raio para uma curvas do caso (VAR) e decaimento lento  $\gamma = 1$ , com campo magnético  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ , constante de acoplamento  $X_\sigma = 0.7$  e três consições de inclusão de momento magnético anômalo,  $k_b = 0$ ,  $k_{n,p}$  e  $k_{n,p,hyp}$ .



Para GM1 e GM3, os raios para FIX -  $\gamma = 4$  são menores que aqueles para os respectivos  $B = 0 \text{ G}$ , para todos os acoplamentos. Para GM1-2 e GM1-3 os raios para  $\gamma = 4$ , tanto para FIX quanto VAR, são sempre maiores maiores que aqueles para os respectivos  $B = 0 \text{ G}$ . De forma geral, os raios tendem a diminuir com os acoplamentos aplicados.

Nas figuras (32) e (33), apresentamos as densidades centrais de energia correspondentes às massas máximas para cada correção no momento magnético anômalo,  $k_b = 0$ ,  $k_{n,p}$  e  $k_{n,p,hyp}$ . As densidades são para o campo magnético  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$  dos casos FIX e VAR e são considerados  $(X_\sigma = 0.6, \gamma = 1 - 4)$ ,  $(X_\sigma = 0.7, \gamma = 1 - 4)$ ,  $(X_\sigma = 0.8, \gamma = 1 - 4)$ . Para o caso FIX, figura (32), vemos que as densidades para  $\gamma = 4$  são sempre maiores que aquelas para  $\gamma = 1$  para todos os acoplamentos  $X_\sigma$  considerados, em todas as condições de correção do momento magnético anômalo. Já para o caso VAR, figura (33), essa distinção já não é mais tão clara. Em ambos os casos, FIX ou VAR, não há variações significativas dos valores das densidades centrais de energia, em função da inclusão dos momentos magnéticos anômalos.

Figura 30 – Massas máximas em função das constantes de acoplamento  $X_\sigma$  utilizadas. Com  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$  e  $k_b = 0$ . Massas  $B = 0 \text{ G}$  (vermelho); massas (FIX)  $\gamma = 1$  (verde),  $\gamma = 4$  (azul escuro); massas (VAR)  $\gamma = 1$  (rosa),  $\gamma = 4$  (azul claro).

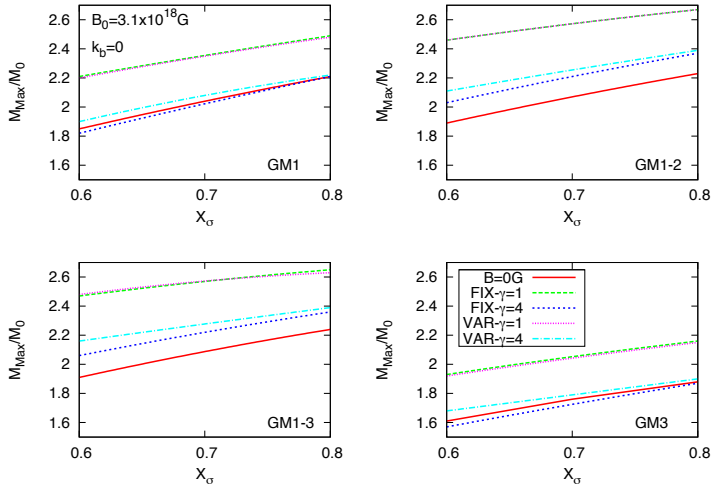


Figura 31 – Raios correspondentes às massas máximas em função das constantes de acoplamento  $X_\sigma$  utilizadas. Com  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$  e  $k_b = 0$ . Massas  $B = 0 \text{ G}$  (vermelho); massas (FIX)  $\gamma = 1$  (verde),  $\gamma = 4$  (azul escuro); massas (VAR)  $\gamma = 1$  (rosa),  $\gamma = 4$  (azul claro).

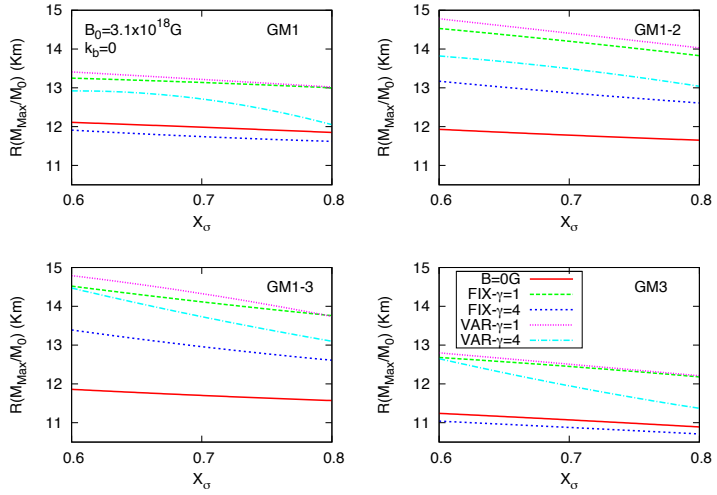


Figura 32 – Densidades centrais de energia correspondentes às massas máximas, em função das correções de momento magnético anômalo utilizadas, com  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ . Caso (FIX);  $\gamma = 1$ ,  $X_\sigma = 0.6$  (vermelho),  $X_\sigma = 0.7$  (azul escuro),  $X_\sigma = 0.8$  (azul claro);  $\gamma = 4$ ,  $X_\sigma = 0.6$  (verde),  $X_\sigma = 0.7$  (rosa),  $X_\sigma = 0.8$  (amarelo).

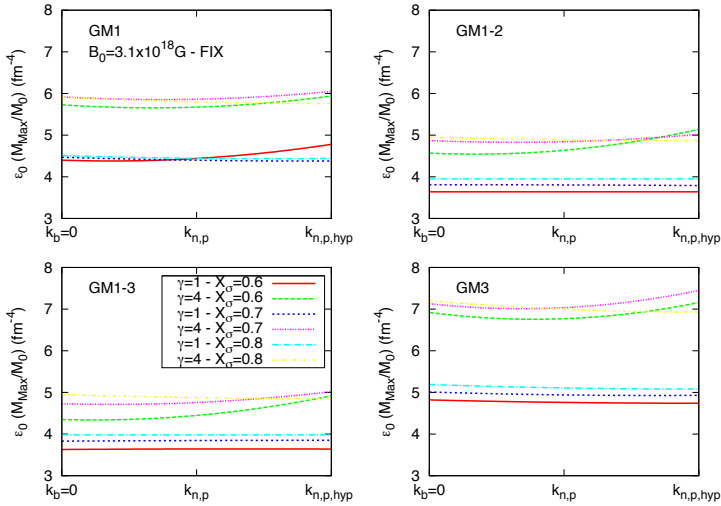
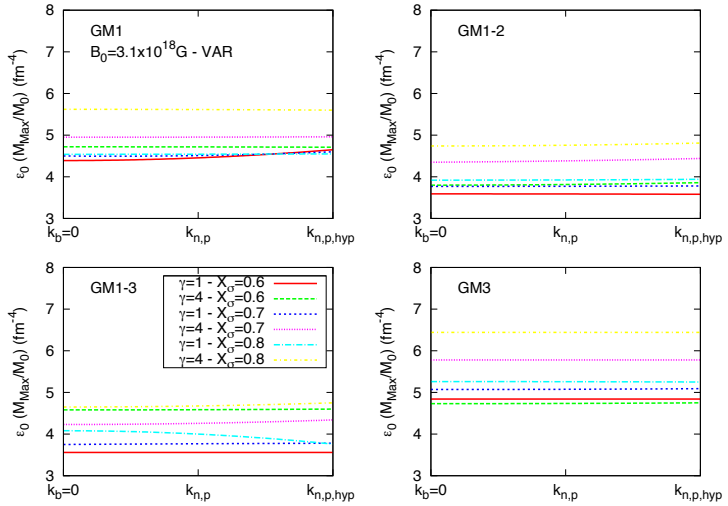


Figura 33 – Densidades centrais de energia correspondentes às massas máximas, em função das correções de momento magnético anômalo utilizadas, com  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ . Caso (VAR);  $\gamma = 1$ ,  $X_\sigma = 0.6$  (vermelho),  $X_\sigma = 0.7$  (azul escuro),  $X_\sigma = 0.8$  (azul claro);  $\gamma = 4$ ,  $X_\sigma = 0.6$  (verde),  $X_\sigma = 0.7$  (rosa),  $X_\sigma = 0.8$  (amarelo).



Uma interessante constatação de nosso trabalho provém das medições realizadas com o pulsar duplo PSR J0737-3039<sup>1</sup>. Descoberto em 2003 pelo observatório *Australia's Parkes*, este é um pulsar duplo, formado por duas estrelas de nêutrons, PSR J0737-3039A e PSR J0737-3039B, emitindo na faixa de radio [58]. A massa da segunda estrela de nêutrons (Pulsar B), a menor massa medida ainda com boa confiabilidade até o momento, é de  $1.249 \pm 0.001 M_{\odot}$  [59]. Em [60], Podsiadlowski *et al.* usaram a massa gravitacional observada do pulsar PSR J0737-3039B e sua massa bariônica, calculada através da integração da equação relativística para o número bariônico (2.46), para estabelecer restrições às equações de estado.

Nas figuras (34 - 39) apresentamos todas as curvas que cruzam o retângulo estabelecido pelas medidas apresentadas em [60] para as massas gravitacionais e bariônica do pulsar PSR J0737-3039. Nos gráficos vamos nos referir a cada conjunto de parâmetros representados por essas curvas pela letra S, seguida de uma numeração que vai do 1 ao 76 e nas tabelas 4 - 4 apresentamos as listas dessas estrelas, e seus diversos parâmetros.

---

<sup>1</sup>PSR vem do termo em inglês “*Pulsating Source of Radio*” e significa Fonte Pulsante de Rádio, a letra J é a ascensão direta do pulsar ao longo do equador celeste e é empregada para os pulsares descobertos a partir do ano 2000. O sinal (+ ou -) seguido pelos números indica o ângulo de declinação, pólos norte ou sul celestiais, do pulsar na esfera celeste.

Figura 34 – Comparação entre os valores de massa gravitacional e bariônica observados para o pulsar PSR J0737-3059 e as curvas teóricas para a parametrização GM1 (FIX). A letra S seguida por um número apresenta o conjunto de parâmetros representados pela curva.

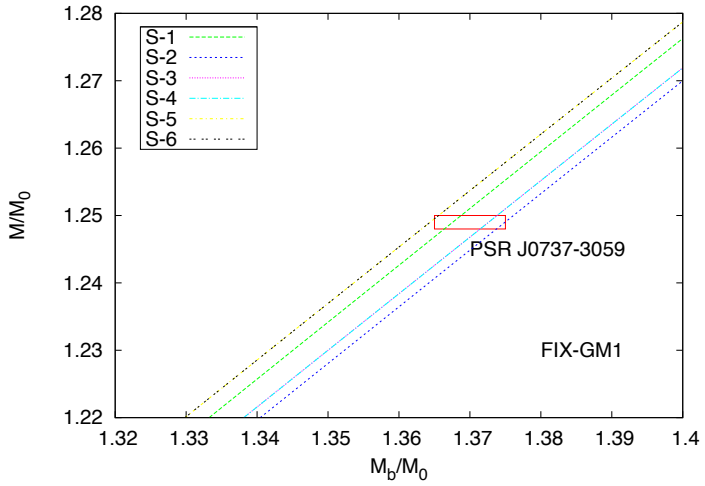


Tabela 7 – Parâmetros das curvas GM1 que cruzam os dados observacionais para PSR J0737-3039.

STAR	CASO	PARAM.	$X_\sigma$	$B_0$	$\gamma$	AMM	$M_{max}/M_0$	$R(\hat{K}m)$	$\varepsilon_0(fm^{-4})$
S-1	FIX	GM1	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_b = 0$	1.82	11.91	5.73
S-2	FIX	GM1	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p,hyp}$	1.91	11.85	5.94
S-3	FIX	GM1	0.7	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p}$	2.06	11.91	5.74
S-4	FIX	GM1	0.7	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.06	11.69	6.05
S-5	FIX	GM1	0.8	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p}$	2.23	11.77	5.76
S-6	FIX	GM1	0.8	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.23	11.77	5.76



Figura 35 – Comparação entre os valores de massa gravitacional e bariônica observados para o pulsar PSR J0737-3059 e as curvas teóricas para a parametrização GM1-2 (FIX).

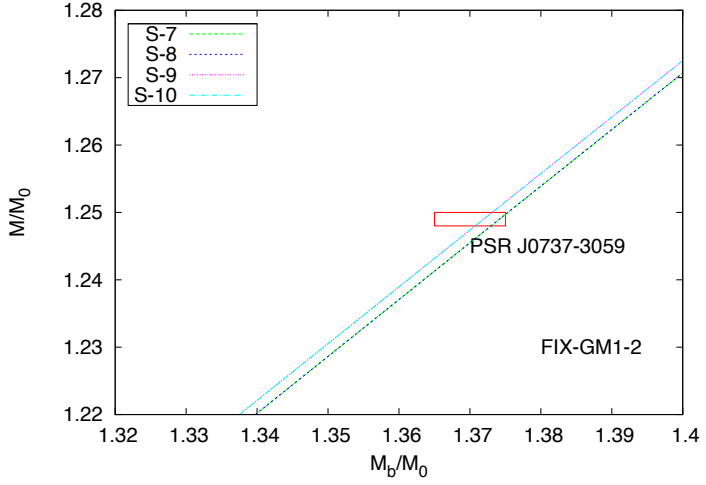


Tabela 8 – Parâmetros das curvas GM1-2 que cruzam os dados observacionais para PSR J0737-3039.

STAR	CASO	PARAM.	$X_\sigma$	$B_0$	$\gamma$	AMM	$M_{max}/M_0$	$R(\hat{K}m)$	$\varepsilon_0(fm^{-4})$
S-7	FIX	GM1-2	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p}$	2.06	13.37	4.42
S-8	FIX	GM1-2	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.08	12.83	5.14
S-9	FIX	GM1-2	0.7	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p}$	2.24	13.02	4.74
S-10	FIX	GM1-2	0.7	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.24	12.73	5.02

Figura 36 – Comparação entre os valores de massa gravitacional e bariônica observados para o pulsar PSR J0737-3059 e as curvas teóricas para a parametrização GM1-3 (FIX).

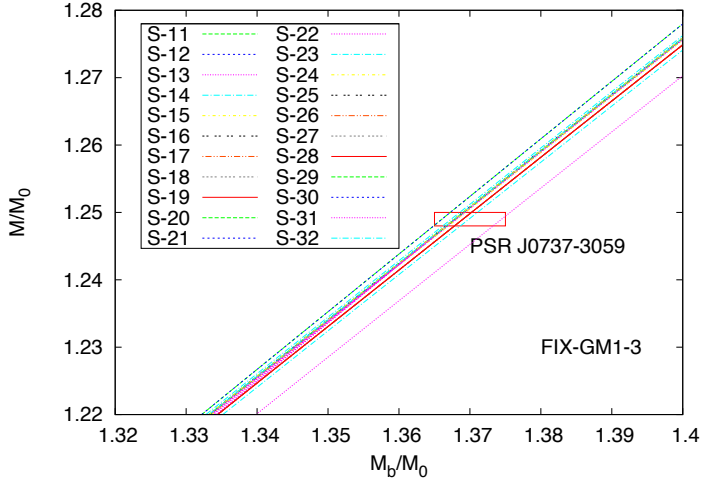


Tabela 9 – Parâmetros das curvas GM1-3 que cruzam os dados observacionais para PSR J0737-3039.

STAR	CASO	PARAM.	$X_\sigma$	$B_0$	$\gamma$	AMM	$M_{max}/M_0$	$R(\hat{K}m)$	$\varepsilon_0(fm^{-4})$
S-11	FIX	GM1-3	0.6	$10^{17}$	1	$k_b = 0$	2.06	13.58	4.29
S-12	FIX	GM1-3	0.6	$10^{17}$	1	$k_{n,p}$	2.06	13.60	4.29
S-13	FIX	GM1-3	0.6	$10^{17}$	1	$k_{n,p,hyp}$	2.14	14.26	3.77
S-14	FIX	GM1-3	0.7	$10^{17}$	1	$k_b = 0$	2.22	13.17	4.64
S-15	FIX	GM1-3	0.7	$10^{17}$	1	$k_{n,p}$	2.22	13.16	4.64
S-16	FIX	GM1-3	0.7	$10^{17}$	1	$k_{n,p,hyp}$	2.27	13.52	4.32
S-17	FIX	GM1-3	0.8	$10^{17}$	1	$k_b = 0$	2.35	12.83	4.83
S-18	FIX	GM1-3	0.8	$10^{17}$	1	$k_{n,p}$	2.53	12.83	4.83
S-19	FIX	GM1-3	0.8	$10^{17}$	1	$k_{n,p,hyp}$	2.38	13.01	4.65
S-20	FIX	GM1-3	0.6	$10^{17}$	4	$k_b = 0$	2.06	13.58	4.29
S-21	FIX	GM1-3	0.6	$10^{17}$	4	$k_{n,p}$	2.06	13.60	4.29
S-22	FIX	GM1-3	0.6	$10^{17}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.14	14.26	3.77
S-23	FIX	GM1-3	0.7	$10^{17}$	4	$k_b = 0$	2.22	13.16	4.64
S-24	FIX	GM1-3	0.7	$10^{17}$	4	$k_{n,p}$	2.22	13.16	4.64
S-25	FIX	GM1-3	0.7	$10^{17}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.27	13.52	4.32
S-26	FIX	GM1-3	0.8	$10^{17}$	4	$k_b = 0$	2.35	12.82	4.83
S-27	FIX	GM1-3	0.8	$10^{17}$	4	$k_{n,p}$	2.35	12.83	4.83
S-28	FIX	GM1-3	0.8	$10^{17}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.38	13.01	4.65
S-29	FIX	GM1-3	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	1	$k_{n,p}$	2.47	14.52	3.65
S-30	FIX	GM1-3	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	1	$k_{n,p,hyp}$	2.49	14.56	3.64
S-31	FIX	GM1-3	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_b = 0$	2.06	13.39	4.35
S-32	FIX	GM1-3	0.8	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_b = 0$	2.36	12.61	4.95

Figura 37 – Comparação entre os valores de massa gravitacional e bariônica observados para o pulsar PSR J0737-3059 e as curvas teóricas para a parametrização GM3 (FIX).

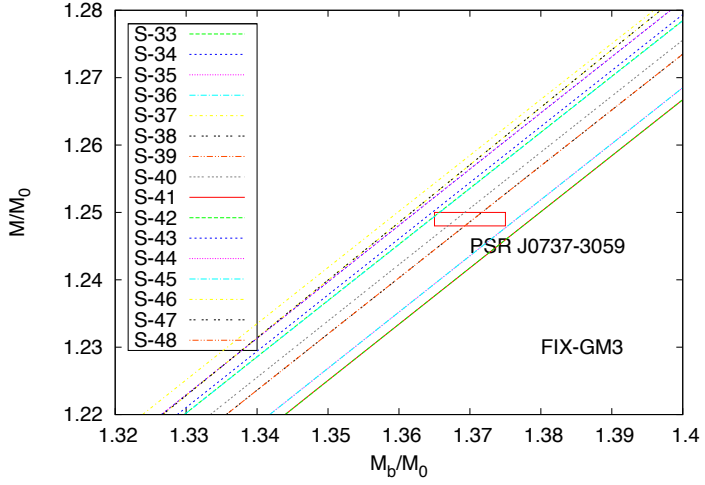


Tabela 10 – Parâmetros das curvas GM3 que cruzam os dados observacionais para PSR J0737-3039.

STAR	CASO	PARAM.	$X_\sigma$	$B_0$	$\gamma$	AMM	$M_{max}/M_0$	$R(\hat{K}m)$	$\varepsilon_0(fm^{-4})$
S-33	FIX	GM3	0.6	$10^{17}$	1	$k_{n,p,hyp}$	1.61	11.69	6.08
S-34	FIX	GM3	0.6	$10^{17}$	4	$k_b = 0$	1.55	10.99	7.12
S-35	FIX	GM3	0.6	$10^{17}$	4	$k_{n,p}$	1.55	11.00	7.13
S-36	FIX	GM3	0.6	$10^{17}$	4	$k_{n,p,hyp}$	1.61	11.68	6.08
S-37	FIX	GM3	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	1	$k_{n,p}$	1.96	12.77	4.74
S-38	FIX	GM3	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	1	$k_{n,p,hyp}$	1.96	12.77	4.74
S-39	FIX	GM3	0.8	$3.1 \times 10^{18}$	1	$k_b = 0$	2.16	12.18	5.19
S-40	FIX	GM3	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_b = 0$	1.57	11.04	6.92
S-41	FIX	GM3	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p}$	1.57	11.04	6.92
S-42	FIX	GM3	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p,hyp}$	1.64	10.94	7.16
S-43	FIX	GM3	0.7	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_b = 0$	1.73	10.88	7.13
S-44	FIX	GM3	0.7	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p}$	1.76	11.10	6.78
S-45	FIX	GM3	0.7	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p,hyp}$	1.77	10.77	7.45
S-46	FIX	GM3	0.8	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_b = 0$	1.87	10.71	7.20
S-47	FIX	GM3	0.8	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p}$	1.89	10.87	6.93
S-48	FIX	GM3	0.8	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p,hyp}$	1.89	10.87	6.93

Figura 38 – Comparação entre os valores de massa gravitacional e bariônica observados para o pulsar PSR J0737-3059 e as curvas teóricas para a parametrização GM1-3 (VAR).

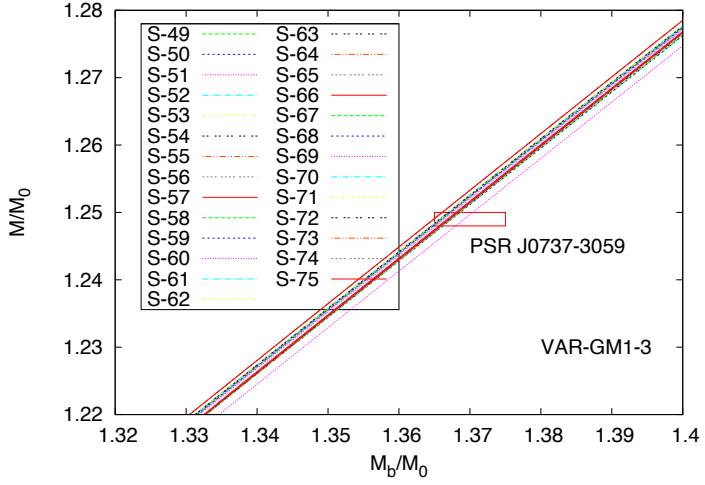


Tabela 11 – Parâmetros das curvas GM1-3 que cruzam os dados observacionais para PSR J0737-3039.

STAR	CASO	PARAM.	$X_\sigma$	$B_0$	$\gamma$	AMM	$M_{max}/M_0$	$R(\dot{K}m)$	$\varepsilon_0(fm^{-4})$
S-49	VAR	GM1-3	0.6	$10^{17}$	1	$k_b = 0$	2.09	13.62	4.28
S-50	VAR	GM1-3	0.6	$10^{17}$	1	$k_{n,p}$	2.09	13.62	4.28
S-51	VAR	GM1-3	0.6	$10^{17}$	1	$k_{n,p,hyp}$	2.11	13.83	4.13
S-52	VAR	GM1-3	0.7	$10^{17}$	1	$k_b = 0$	2.24	13.18	4.63
S-53	VAR	GM1-3	0.7	$10^{17}$	1	$k_{n,p}$	2.24	13.18	4.63
S-54	VAR	GM1-3	0.7	$10^{17}$	1	$k_{n,p,hyp}$	2.25	13.27	4.54
S-55	VAR	GM1-3	0.8	$10^{17}$	1	$k_b = 0$	2.36	12.83	4.82
S-56	VAR	GM1-3	0.8	$10^{17}$	1	$k_{n,p}$	2.36	12.82	4.82
S-57	VAR	GM1-3	0.8	$10^{17}$	1	$k_{n,p,hyp}$	2.37	12.86	4.77
S-58	VAR	GM1-3	0.6	$10^{17}$	4	$k_b = 0$	2.30	14.56	3.58
S-59	VAR	GM1-3	0.6	$10^{17}$	4	$k_{n,p}$	2.30	14.56	3.58
S-60	VAR	GM1-3	0.6	$10^{17}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.30	14.58	3.56
S-61	VAR	GM1-3	0.7	$10^{17}$	4	$k_b = 0$	2.42	13.96	3.93
S-62	VAR	GM1-3	0.7	$10^{17}$	4	$k_{n,p}$	2.42	13.96	3.93
S-63	VAR	GM1-3	0.7	$10^{17}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.42	13.96	3.93
S-64	VAR	GM1-3	0.8	$10^{17}$	4	$k_b = 0$	2.52	13.64	4.15
S-65	VAR	GM1-3	0.8	$10^{17}$	4	$k_{n,p}$	2.52	13.63	4.15
S-66	VAR	GM1-3	0.8	$10^{17}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.52	13.64	4.15
S-67	VAR	GM1-3	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_b = 0$	2.16	14.47	3.58
S-68	VAR	GM1-3	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p}$	2.16	14.47	3.58
S-69	VAR	GM1-3	0.6	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.18	14.44	3.60
S-70	VAR	GM1-3	0.7	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_b = 0$	2.28	13.68	4.23
S-71	VAR	GM1-3	0.7	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p}$	2.28	13.68	4.23
S-72	VAR	GM1-3	0.7	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.29	13.58	4.34
S-73	VAR	GM1-3	0.8	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_b = 0$	2.39	13.09	4.65
S-74	VAR	GM1-3	0.8	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p}$	2.39	13.09	4.65
S-75	VAR	GM1-3	0.8	$3.1 \times 10^{18}$	4	$k_{n,p,hyp}$	2.41	12.99	4.75



Figura 39 – Comparação entre os valores de massa gravitacional e bariônica observados para o pulsar PSR J0737-3059 e as curvas teóricas para a parametrização GM3 (VAR).

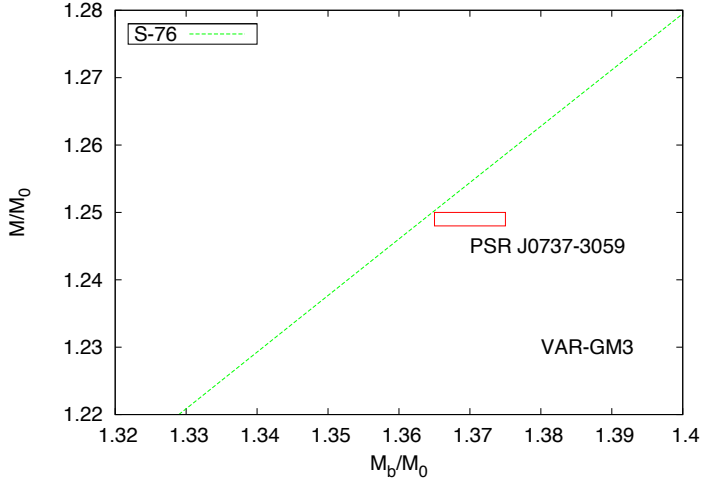
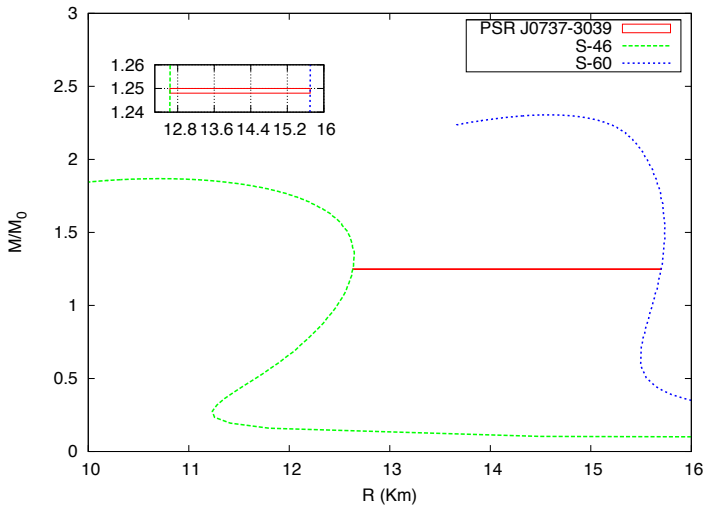


Tabela 12 – Parâmetros das curvas GM3 que cruzam os dados observacionais para PSR J0737-3039.

STAR	CASO	PARAM.	$X_\sigma$	$B_0$	$\gamma$	AMM	$M_{max}/M_0$	$R(\tilde{K}m)$	$\varepsilon_0(fm^{-4})$
S-76	VAR	GM3	0.6	$10^{17}$	1	$k_{n,p,hyp}$	1.64	11.76	5.91

A partir das figuras (34 - 39) podemos inferir na figura (40), um raio teórico para o pulsar PSR J0737-3059B. Usando as relações para as estrelas de menor (S-46) e maior (S-60) raios que cruzam o retângulo que demarca as medidas das massas gravitacional e bariônica marcamos a medida para a massa gravitacional ( $M = 1.249 \pm 0.001$ )  $M_0$  no gráfico e inferimos os valores mínimo, 12.63 Km e máximo, 15.70 Km de raio que nossos modelos podem sugerir para esse pulsar.

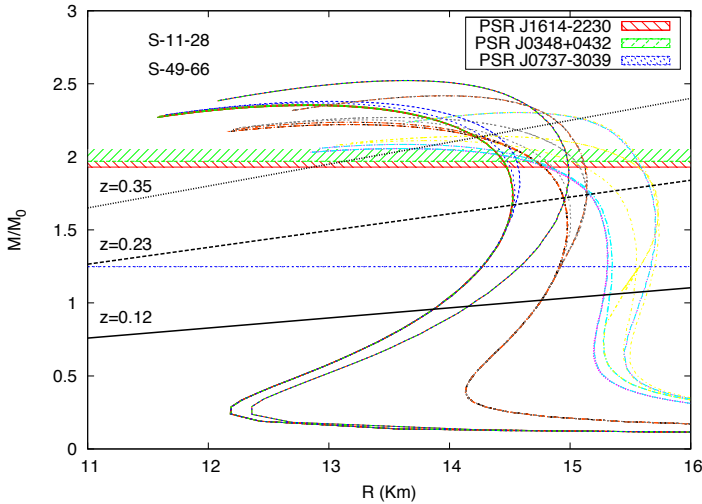
Figura 40 – Relação de massa-raio das estrelas S46 (menor raio) e S60 (maior raio) em comparação com as medidas observacionais da massa gravitacional do pulsar PSR J0737-3059B ( $M = 1.249 \pm 0.001$   $M_0$ ).



Além do pulsar PSR J0737-3039, investigamos também mais duas medidas observacionais recentes de massa realizadas com os pulsares PSR J1614-2230 [61] e PSR J0348+0432 [62]. Em [61] Demorest *et al* apresentam medidas realizadas no período de 2010, no *National Radio Astronomy Observatory Green Bank Telescope* (GBT), nos Estados Unidos, usando o método de Shapiro *delay* para inferir as massas da estrela de nêutrons e sua companheira no sistema binário PSR-J1614-2230 com grande precisão. A massa apresentada para o pulsar foi de  $(1.97 \pm 0.04)$   $M_0$ . Em [62] Antoniadis *et al* apresentam os resultados de suas observações para o sistema binário PSR-J0348+0432. Usando observações de rádio e espectroscopia ótica para inferir as massas do pulsar e de sua companheira anã branca obtiveram os valores

de  $(2.01 \pm 0.04) M_0$  e  $(1.72 \pm 0.003) M_0$ , respectivamente. Este é o segundo pulsar a ter sua massa medida com precisão confiável, por volta de duas massas solares, desde as medidas apresentadas para o sistema PSR-J1614-2230. Essas medidas foram realizadas no rádio telescópio do observatório de Arecibo, Porto Rico e confirmadas pelo rádio telescópio de Effelsberg, Alemanha. Adicionamos ainda os vínculos relacionados com o *redshift* ( $z$ ) para as relações de massa e raio, apresentados pelos trabalhos de Cottam *et al* [63] e Sanwal *et al* [64].

Figura 41 – Relação de massa-raio das estrelas S11-28 e S49-66 em comparação com as medidas observacionais da massa gravitacionais dos pulsares PSR J0737-3059B ( $M = 1.249 \pm 0.001 M_0$ ), PSR J1614-2230 ( $M = 1.97 \pm 0.04 M_0$ ) e PSR J0348+0432 ( $M = 2.01 \pm 0.04 M_0$ ).



A figura (41) apresenta as relações de massa-raio das estrelas tabeladas nos intervalos S-11 até S-28 e S-49 até S-66. As equações de estado selecionadas contemplam apenas estrelas com campos magnéticos  $B_0 = 10^{17} G$  e apresentam massas máximas superiores àquela de  $((1.97 \pm 0.04) M_0)$ , apresentada por Demorest e seus colegas. As retas inclinadas são vínculos obtidos a partir de cálculos do *redshift* ( $z$ ) de emissões espectrais observadas. O que podemos notar é que apenas estrelas com a parametrização GM1-3 ( $\Lambda_\omega = 0.03$ ) descrevem, ao mesmo tempo, os três pulsares apresentados aqui. As estrelas contidas no intervalo S-11 até S-28 são todas pertencentes ao caso (FIX) do campo magnético,

enquanto as estrelas contidas no intervalo S-49 até S-66 são todas do caso (VAR). Quando consideramos os demais parâmetros como acoplamento ( $X_\sigma$ ), dependência com a densidade ( $\gamma$ ) e correções do momento magnético ( $k_b = 0$ ,  $k_{n,p}$  e  $k_{n,p,hyp}$ ), notamos que há uma grande variedade de combinações que descrevem os três pulsares.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesse trabalho estudamos os efeitos de fortes campos magnéticos sobre a energia de simetria e sua inclinação, para a matéria nuclear. Também estudamos os efeitos desses campos nas equações de estado e relações de massa-raio, obtidas a partir da solução das equações TOV, da matéria hadrônica.

No capítulo de introdução fizemos uma breve apresentação da história da descoberta dos primeiros pulsares e das motivações que levaram ao estudo dos magnetares. No segundo capítulo apresentamos a motivação teórica para esse estudo, com as lagrangianas apresentadas, as parametrizações empregadas, a inclusão de um termo que leva em conta a interação entre os mésons  $\omega$  e  $\rho$ . Também discutimos a energia de simetria e sua inclinação. Restringimo-nos a valores dos campos magnéticos que permitem que nossa aproximação para a matéria estelar isotrópica seja válida.

No terceiro capítulo apresentamos nossos resultados para os estudos a respeito da influência de fortes campos magnéticos sobre a energia de simetria da matéria de nucleons e sua inclinação. Para tal, estudamos as parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3, GM3, NL3 e FSU. Notamos que a quantização de Landau causada pelos campos magnéticos cria descontinuidades na energia de simetria. Essas descontinuidades intensificam-se com a aplicação de campos magnéticos mais fortes, porém a inclusão do momento magnético anômalo é capaz de reduzi-las. Notamos também que a inclusão do termo que leva em conta a interação entre os mésons  $\omega$  e  $\rho$  altera o comportamento da energia de simetria.

No quarto capítulo mostramos as equações de estado geradas com as parametrizações GM1, GM1-2, GM1-3 e GM3, assim como as relações de massa-raio e densidade central de energia e como essas variam com as constantes de acoplamento entre os mésons e os híperons. Também verificamos os efeitos da inclusão gradual das correções nos momentos magnéticos. Vimos que de modo geral, campos magnéticos mais fortes endurecem as equações de estado, gerando massas máximas maiores. Por sua vez, a inclusão do termo que leva em conta a interação entre os mésons  $\omega$  e  $\rho$  também pode afetar as relações de massa-raio. Fomos capazes de gerar curvas para massas gravitacionais e bariônicas que cruzaram as barras de erros do pulsar PSR J0737-3059 e inferimos para ele um raio teórico entre 12.63 e 15.70 Km. Além disso com a

parametrização GM1-3 obtivemos relações de massa-raio que descrevem os pulsares PSR J1614-2230 e PSR J0348+0432.

Para o futuro podemos estender nosso trabalho para o estudo da inclusão da anisotropia gerada pelo campo magnético aplicado. As estrelas híbridas, com quarks desconfinados em seu interior e hádrons nas camadas mais externas, também podem ser uma fonte de novos trabalhos. Podemos ainda estudar a inclusão da temperatura finita nos nossos modelos para descrever protoestrelas de nêutrons. A parametrização GM1-3 se mostrou a mais adequada para descrever as propriedades estelares e será a escolhida para a continuação de nossos esforços.



## APÊNDICE A – Matrizes de Pauli e Dirac



## A.1 NOTAÇÃO

### Coordenada e Momento

O espaço-tempo das coordenadas  $(t, x, y, z) \equiv (t, \vec{x})$  é definido pela notação quadri-vetorial contravariante:

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z), \quad (\text{A.1})$$

e o quadri-vetor covariante é obtido ao mudarmos os sinais das componentes vetoriais:

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (t, -x, -y, -z) = \eta_{\mu\nu} x^\nu, \quad (\text{A.2})$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é o tensor métrico do espaço de Minkowski:

$$\eta^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad e \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (\text{A.4})$$

## A.2 MATRIZES DE PAULI

As matrizes de Pauli são Hermitianas, unitárias e sem traço, dadas por [65]:

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

É comum o uso de índices numéricos:  $\sigma_1 = \sigma_x$ ,  $\sigma_2 = \sigma_y$  e  $\sigma_3 = \sigma_z$ .

Regras do produto:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{A.8})$$

o primeiro termo implica numa matriz unitária  $2 \times 2$  e um somatório

sobre  $\mathbf{k}$  no segundo termo. A relação de comutação fica:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (\text{A.9})$$

e a de anticomutação:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (\text{A.10})$$

### A.3 MATRIZES DE DIRAC

Também conhecidas como matrizes gama, são 4 matrizes unitárias sem traço  $4 \times 4$ , dadas por:

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$\gamma^i \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

onde  $\mathbf{1}$  é uma matriz unitária  $2 \times 2$  e  $\mathbf{0}$  é uma matriz  $2 \times 2$  de zeros.  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli. Ao abaixar os índices mudamos o sinal das componentes espaciais:  $\sigma_0 = \sigma^0$ ,  $\sigma_i = -\sigma^i$ . Apresentamos também:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{A.13})$$

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

O produto:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \frac{i}{2}(-\gamma^\nu\gamma^\mu\partial^\mu A^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\partial^\nu A^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\partial^\mu A^\nu \\ &\quad - \gamma^\mu\gamma^\nu\partial^\nu A^\mu), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

para o calibre usado no capítulo 2, temos  $A^\mu(\vec{x}) = \delta_{\mu 2}x_1 B$

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}(-\gamma^\nu\gamma^\mu\partial^\mu\delta_{\nu 2}x_1 B \\ &\quad + \gamma^\nu\gamma^\mu\partial^\nu\delta_{\mu 2}x_1 B + \gamma^\mu\gamma^\nu\partial^\mu\delta_{\nu 2}x_1 B \\ &\quad - \gamma^\mu\gamma^\nu\partial^\nu\delta_{\mu 2}x_1 B). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Para cada um dos termos acima é necessário atender a condição imposta pelo delta de Kroneker, além disso temos que o produto das matrizes gama ficam:

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \gamma^\nu &= \begin{pmatrix} -\sigma^\mu \sigma^\nu & 0 \\ 0 & -\sigma^\mu \sigma^\nu \end{pmatrix} \\ \gamma^\nu \gamma^\mu &= \begin{pmatrix} -\sigma^\nu \sigma^\mu & 0 \\ 0 & -\sigma^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.17}$$

Utilizando o propriedade:

$$\sigma^i \sigma^j = \delta_{ij} - \epsilon_{ijk} \sigma^k,\tag{A.18}$$

teremos:

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \gamma^\nu &= \begin{pmatrix} -i\sigma^3 & 0 \\ 0 & -i\sigma^3 \end{pmatrix} \\ \gamma^\nu \gamma^\mu &= \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.19}$$

Voltando à equação (A.16) teremos:

$$\sigma^{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left( 4i \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix} \right) B \vec{e}_3,\tag{A.20}$$

ou seja:

$$\sigma^{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2 \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix} = -2B\Sigma_3,\tag{A.21}$$



## **APÊNDICE B – Momento magnético anômalo.**





Em 1922, Otto Stern e Walther Gerlach demonstraram que o elétron possui um momento magnético intrínseco  $\vec{\mu}$  associado a seu momento angular, com o conhecido experimento de Stern-Gerlach. Esse momento intrínseco pode ser escrito como:

$$\vec{\mu} = -g_S \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}, \quad (\text{B.1})$$

em que  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$  é o magneto de Bohr,  $e$  e  $m$  são a carga e a massa do elétron. O momento magnético associado ao movimento orbital do elétron é definido como:

$$\vec{\mu}_L = -g_L \mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar}, \quad (\text{B.2})$$

onde  $g_S$  e  $g_L$  são as razões giromagnéticas de spin e orbital do elétron, respectivamente, ou fatores- $g$ .

Os valores teóricos previstos pelas equações de Dirac para os fatores- $g$  de spin e orbital são  $g_S = 2$  e  $g_L = 1$ . Porém, em 1947 Kusk e Foley encontraram para o momento magnético do elétrons um valor aproximadamente igual ao do magneton de Bohr. Eles obtiveram  $g_S = 2.00229 \pm 0.00008$  e  $g_L = 1$  ou alternativamente  $g_S = 2$  e  $g_L = 0.99886 \pm 0.00004$  [66]. Essa diferença entre os valores teóricos e experimentais ficou conhecida como momento magnético anômalo. No mesmo ano, estudando o comportamento do elétron em um campo magnético externo, Schwinger mostrou que a correção fornecida pelo campo magnético ao momento magnético seria da ordem de  $a = 0.001162$  [67]. Em 1948 Kush e Foley apresentaram novos resultados para os fatores- $g$ , com  $g_L = 1$  e  $g_S = 2(1.00119 \pm 0.00005)$  [68]. Essas diferenças ocorrem também para prótons, nêutrons e híperons e sua inclusão torna-se importante quando essas partículas estão expostas a campos magnéticos intensos.

Para calcular sua influência é necessário considerar o acoplamento eletromagnético dessas partículas, faremos uma substituição no acoplamento mínimo:

$$\begin{aligned} P_\mu &\rightarrow P_\mu - eA_\mu \\ i\partial_\mu &\rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

em que  $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ , um potencial escalar e um vetor e  $e$  é a carga do

elétron. Isso torna a equação de Dirac:

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu(x))\psi(x) = m\psi(x). \quad (\text{B.4})$$

Em que  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac<sup>1</sup>. Tomaremos:

$$\begin{aligned} \not{P} &= \gamma^\mu i\partial_\mu \\ \not{A} &= \gamma^\mu A_\mu(x), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

o que torna (B.4) em:

$$(\not{P} - e\not{A} - m\mathbb{I}_4)\psi = 0. \quad (\text{B.6})$$

Tomando  $\psi = \frac{1}{m}(\not{P} - e\not{A} - m\mathbb{I}_4)\chi$ , teremos:

$$\begin{aligned} (\not{P} - e\not{A} - m\mathbb{I}_4) \left[ \frac{1}{m}(\not{P} - e\not{A} - m\mathbb{I}_4)\chi \right] &= 0, \quad (\text{B.7}) \\ \frac{1}{m} \left[ (\not{P})^2 - \not{P}e\not{A} + \not{P}m\mathbb{I}_4 - \not{P}e\not{A} + (e\not{A})^2 - e\not{A}m\mathbb{I}_4 \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{I}_4\not{P} + m\mathbb{I}_4e\not{A} - (m\mathbb{I}_4)^2 \right] \chi = 0 \\ \frac{1}{m} \left[ (\not{P})^2 - 2\not{P}e\not{A} + (e\not{A})^2 - (m\mathbb{I}_4)^2 \right] \chi &= 0 \\ (\not{P} - e\not{A})^2 \chi &= m^2 \chi. \end{aligned}$$

A expressão (B.7) pode ser escrita como:

$$(\not{P} - e\not{A})^2 \chi = \gamma^\mu \gamma^\nu (p_\mu - eA_\mu)(p_\nu - eA_\nu) \chi. \quad (\text{B.8})$$

E ainda podemos dividir (B.8) em duas partes:

$$\begin{aligned} (\not{P} - e\not{A})^2 \chi &= \frac{1}{2} \left[ \gamma^\mu \gamma^\nu (p_\mu - eA_\mu)(p_\nu - eA_\nu) \right. \\ &\quad \left. + \gamma^\nu \gamma^\mu (p_\nu - eA_\nu)(p_\mu - eA_\mu) \right] \chi. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

---

<sup>1</sup>Ver apêndice A

Realizando os produtos, temos:

$$\begin{aligned}
 (\not{P} - e\not{A})^2 \chi = & \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \left[ P_\mu P_\nu + e^2 A_\mu A_\nu \right. \\
 & \left. - e(P_\mu A_\nu + A_\mu P_\nu) \right] \chi \\
 + & \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu \left[ P_\nu P_\mu + e^2 A_\nu A_\mu \right. \\
 & \left. - e(P_\nu A_\mu + A_\nu P_\mu) \right] \chi.
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
 P_\nu P_\mu &= P_\mu P_\nu \\
 A_\nu A_\mu &= A_\mu A_\nu,
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

mas mais cuidado deve ser tomado quanto aos termos cruzados, com  $P_\nu A_\mu$  e  $P_\mu A_\nu$ . Vamos somar e subtrair dois termos cruzados ao último parênteses do segundo termo de (B.10). Teremos:

$$\begin{aligned}
 P_\nu A_\mu + A_\nu P_\mu &= P_\nu A_\mu + A_\nu P_\mu + P_\mu A_\nu + A_\mu P_\nu \\
 &\quad - P_\mu A_\nu - A_\mu P_\nu.
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Usando (B.11) e (B.12) reescrevemos (B.10):

$$\begin{aligned}
 (\not{P} - e\not{A})^2 \chi = & \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \left[ P_\mu P_\nu + e^2 A_\mu A_\nu \right. \\
 & \left. - e(P_\mu A_\nu + A_\mu P_\nu) \right] \chi \\
 + & \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu \left[ P_\nu P_\mu + e^2 A_\nu A_\mu \right. \\
 & - e(P_\nu A_\mu + A_\nu P_\mu \\
 & + P_\mu A_\nu + A_\mu P_\nu \\
 & \left. - P_\mu A_\nu - A_\mu P_\nu) \right] \chi.
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Rearranjando os termos, encontramos:

$$\begin{aligned}
(\not{P} - e\not{A})^2 \chi = & \frac{(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)}{2} \left[ P_\mu P_\nu + e^2 A_\mu A_\nu \right. \\
& \left. - e(P_\mu A_\nu + A_\mu P_\nu) \right] \chi \\
& + \frac{e}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu \left[ P_\nu A_\mu + A_\nu P_\mu - P_\mu A_\nu - A_\mu P_\nu \right] \chi.
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Tomando o segundo termo do lado direito de (B.14), vemos que podemos reescrever os termos com índices iguais, tomando a correspondência  $p \longleftrightarrow i\partial$ :

$$\begin{aligned}
(-P_\mu A_\nu + A_\nu P_\mu) \chi = & -i\partial_\mu (A_\nu \chi) + A_\nu i\partial_\mu \chi \\
= & -i(\partial_\mu A_\nu) \chi - iA_\nu \partial_\mu \chi + iA_\nu \partial_\mu \chi \\
= & -i(\partial_\mu A_\nu) \chi,
\end{aligned} \tag{B.15}$$

de onde tiramos que  $[A_\nu, P_\mu] = -i\partial_{\mu\nu} A_\nu$ . E também:

$$\begin{aligned}
(P_\nu A_\mu - A_\mu P_\nu) \chi = & -i\partial_\nu (A_\mu \chi) + A_\mu i\partial_\nu \chi \\
= & i(\partial_\nu A_\mu) \chi + iA_\mu \partial_\nu \chi - iA_\mu \partial_\nu \chi \\
= & i(\partial_\nu A_\mu) \chi,
\end{aligned} \tag{B.16}$$

de onde também tiramos que  $[A_\mu, P_\nu] = i\partial_{\nu\mu} A_\mu$ . Agora tomando a relação de anticomutação das matrizes gamma [69],

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} \\
x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu, \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu,
\end{aligned} \tag{B.17}$$

aplicamos (B.15) e (B.16) em (B.14):

$$\begin{aligned}
(\not{P} - e\not{A})^2 \chi &= \left[ P_\mu P^\mu + e^2 A_\mu A^\mu \right. \\
&\quad \left. - e(P_\mu A^\mu + A_\mu P^\mu) \right] \chi \\
&\quad - \frac{e}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu i(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) \chi \\
&= (p - eA)^2 \chi + i \frac{e}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \chi,
\end{aligned} \tag{B.18}$$

em que definimos o tensor do campo eletromagnético  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Ainda sobre (B.18), podemos reescrever o fator  $\gamma^\mu \gamma^\nu$ :

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu &= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{2g^{\mu\nu} \mathbb{I}_4} + \underbrace{(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{-2i\sigma^{\mu\nu}} \right] \\
&= g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Aplicando (B.19) em (B.18):

$$(\not{P} - e\not{A})^2 \chi = (p - eA)^2 \chi + i \frac{e}{2} (g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}) F_{\mu\nu} \chi, \tag{B.20}$$

sabendo que  $g^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$  e  $\sigma^{\nu\mu} = -\sigma^{\mu\nu}$ , teremos:

$$(\not{P} - e\not{A})^2 \chi = (p - eA)^2 \chi - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \chi. \tag{B.21}$$

Agora, voltando à equação (B.7), podemos reescrever:

$$\left[ (P_\mu - eA_\mu)(P^\mu - eA^\mu) \mathbb{I}_4 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \chi = m^2 \chi. \tag{B.22}$$

A pergunta é se existe outra possibilidade de acoplamento invariante de Gauge similar ao que levou à equação (B.22). Há um acoplamento direto, invariante de Gauge (não mínimo) ao tensor do campo eletromagnético  $F_{\mu\nu}$  chamado de Termo de Pauli,  $\frac{\mu}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , que dá origem a um momento magnético anômalo  $\mu \frac{e}{2m}$ , em adição ao momento magnético  $\frac{e}{2m}$ . Assim, a equação (B.4) deve ser escrita como:

$$\left[ \gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu(x)) + \frac{\mu}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \psi(x) = m\psi(x). \quad (\text{B.23})$$

## **APÊNDICE C – As equações de movimento**





Relembrando a lagrangiana que usamos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_b = & \bar{\psi}_b (i\gamma_\mu \partial^\mu - q_b \gamma_\mu A^\mu - m_b + g_{\sigma b} \sigma \\ & - g_{\omega b} \gamma_\mu \omega^\mu - g_{\rho b} \tau_{3b} \gamma_\mu \rho^\mu - k_b \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \psi_b, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - U(\sigma) + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ & - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu - \frac{1}{4} P^{\mu\nu} P_{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{4!} \xi g_\omega^4 (\omega_\mu \omega^\mu)^2 + \Lambda_\omega (g_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu) (g_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{L}_l = \bar{\psi}_l (i\gamma_\mu \partial^\mu - q_l \gamma_\mu A^\mu - m_l) \psi_l, \quad (\text{C.3})$$

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (\text{C.4})$$

Podemos calcular as equações de movimento com o auxílio das equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda x_i)} = 0, \quad (\text{C.5})$$

É possível notar facilmente que ao considerarmos os termos da equação de Euler-Lagrange para os léptons, teremos:

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - q_b \gamma_\mu \vec{A}^\mu - m_l] \psi_l = 0, \quad (\text{C.6})$$

A primeira coisa que fazemos é calcular os termos da equação de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_b} = & (q_b \gamma_\mu A^\mu - m_b^* - g_{\omega b} \gamma_\mu \omega^\mu \\ & - g_{\rho b} \tau_{3b} \gamma_\mu \vec{\rho}^\mu - k_b \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \bar{\psi}_b \\ \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \psi_b)} = & (\partial_\lambda i\gamma_\mu) \bar{\psi}_b \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Ficamos então com:

$$\begin{aligned} & [-\partial_\lambda i\gamma_\mu + q_b\gamma_\mu A^\mu - m_b^* - g_{\omega b}\gamma_\mu\omega^\mu \\ & - g_{\rho b}\tau_{3b}\gamma_\mu\vec{\rho}^\mu - k_b\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]\bar{\psi}_b = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Tomando as equações:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu p^\mu &= (\gamma^0, -\vec{\gamma}) \cdot (p^0, \vec{p}) = \gamma^0 i\partial_t - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}, \\ \gamma_\mu A^\mu &= (\gamma^0, -\vec{\gamma}) \cdot (\phi, \vec{A}) = \gamma^0 \phi - \vec{\gamma} \cdot \vec{A}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

teremos:

$$\begin{aligned} & [(-\gamma^0 i\partial_t + \vec{\gamma} \cdot \vec{p}) + q_b(\gamma^0 \phi + \vec{\gamma} \cdot \vec{A}) - m_b^* \\ & - g_{\omega b}\gamma_\mu\omega^\mu - g_{\rho b}\tau_{3b}\gamma_\mu\vec{\rho}^\mu - k_b\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]\bar{\psi}_b = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Vamos novamente aplicar a transformação de Gauge, em que  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-iEt}$ , e aplicá-la onde for conveniente, assim teremos:

$$\begin{aligned} & [(\gamma^0 E + \vec{\gamma} \cdot \vec{p}) + q_b(\gamma^0 \phi + \vec{\gamma} \cdot \vec{A}) - m_b^* \\ & + g_{\omega b}\gamma_\mu\omega^\mu + g_{\rho b}\tau_{3b}\gamma_\mu\vec{\rho}^\mu \\ & + k_b\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]\bar{\psi}e^{-iEt} = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

e após multiplicarmos a equação acima por  $e^{+iEt}$  e por  $\gamma_0$  rearranjá-la de forma mais interessante para nossas aspirações, vamos utilizar novamente as definições:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \gamma_0 \vec{\gamma} \\ \beta &= \gamma_0 \\ \gamma_0 \gamma^0 &= 1. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Aplicando na equação acima, temos:

$$\begin{aligned} & [(\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - q_b \vec{A}) + q_b \phi - \beta m_b^*)\bar{\psi} = \\ & [E - g_{\omega b}\gamma_0\gamma_\mu\omega^\mu - g_{\rho b}\tau_{3b}\gamma_0\gamma_\mu\vec{\rho}^\mu - k_b\sigma_{\mu\nu}\gamma_0 F^{\mu\nu}]\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Aqui aplicamos a teoria do campo médio, onde consideramos um espaço isotrópico e estático. Assim apenas os termos escalares precisam ser

considerados.

$$\begin{aligned} & [(\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - q_b \vec{A}) + q_b \phi - \beta m_b^*) \bar{\psi} = \\ & [E - g_{\omega b} \omega^0 - g_{\rho b} \tau_{3b} \rho^0] \bar{\psi}, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

é fácil perceber que o último termo,  $k_b \sigma_{\mu\nu} \gamma_0 F^{\mu\nu}$ , vai a zero quando tomamos  $F^{00}$ . Além disso, em nosso modelo consideramos um sistema sob a ação de um campo magnético externo e estático, de modo que não há a existência de um campo elétrico associado, por isso vamos desprezar o termo escalar do quadrivetor potencial-eletromagnético e fazer  $\phi = 0$ . Teremos então:

$$\begin{aligned} & [(\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - q_b \vec{A}) - \beta m_b^*) \bar{\psi} = \\ & [E - g_{\omega b} \omega^0 - g_{\rho b} \tau_{3b} \rho^0] \bar{\psi}, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} &= -m_\sigma^2 \sigma - \underbrace{bm_n g_{\sigma n}^3 \sigma^2 - c\sigma - bm_n g_{\sigma n}^4 \sigma^3}_{\frac{\partial U(\sigma)}{\partial \sigma}} \quad (\text{C.16}) \\ &+ g_{\sigma b} \bar{\psi}_b \psi_b \\ \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \sigma)} &= \frac{\delta_{\lambda\mu}}{2} \partial_\lambda \partial^\mu \sigma. \end{aligned}$$

Voltando à equação de Euler-Lagrange teremos:

$$m_\sigma^2 \sigma + \frac{\partial U(\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\delta_{\lambda\mu}}{2} \partial_\lambda \partial^\mu \sigma = g_{\sigma b} \bar{\psi}_b \psi_b \quad (\text{C.17})$$

Quando aplicamos a teoria de campo médio teremos:

$$m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle + \frac{\partial U(\sigma)}{\partial \sigma} = \sum_b g_{\sigma b} n_b^s \quad (\text{C.18})$$

em que o termo  $\frac{\delta_{\lambda\mu}}{2} \partial_\lambda \partial^\mu \sigma = 0$  pois descartamos as derivadas temporais. O termo  $\bar{\psi}_b \psi_b = n_b^s$  é a própria densidade bariônica escalar, por fim, somamos o termo de acoplamento dos mésons sobre todos os bárions.

Os termo da lagrangeana que envolvem o campo  $\omega^\mu$  podem ser

resumidos em um lagrangeana específica desse campo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\omega^\mu} = & -g_{\omega b}\gamma_\mu\omega^\mu\bar{\psi}_b\psi_b + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu \\ & - \frac{1}{4}[(\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu)(\partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu)] \\ & + \frac{1}{4!}\xi g_\omega^4(\omega_\mu\omega^\mu)^2 + \Lambda_\omega g_\rho^2\vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu g_\omega^2\omega_\nu\omega^\nu\end{aligned}\quad (\text{C.19})$$

Lembrando que  $v_i = g_{ij}v^j$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\omega^i}(\omega_\mu\omega^\mu)^2 &= 2(\omega_\mu\omega^\mu)\frac{\partial}{\partial\omega^i}(\omega_\mu\omega^\mu) \\ &= 2(\omega_\mu\omega^\mu)(\omega_\mu\frac{\partial}{\partial\omega^i}\omega^\mu + \omega^\mu\frac{\partial}{\partial\omega^i}\omega_\mu) \\ &= 2(\omega_\mu\omega^\mu)(\omega_\mu\delta_{\mu i} + \omega^\mu g_{\mu j}\delta_{ji}) \\ &= 4\omega_\mu(\omega_\mu\omega^\mu)\end{aligned}\quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial(\partial_\lambda\omega^i)}[(\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu)(\partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu)] \\ &= (\partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu)\frac{\partial}{\partial(\partial_\lambda\omega^i)}(\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu) \\ &+ (\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu)\frac{\partial}{\partial(\partial_\lambda\omega^i)}(\partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu) \\ &= (\delta_{\lambda\mu}\delta_{i\nu} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{i\mu})(\partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu) \\ &+ (\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu)(g_{\mu k}g_{\nu t}\delta_{\lambda k}\delta_{it} - g_{\nu k}g_{\mu t}\delta_{\lambda k}\delta_{it}) \\ &= 4(\partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu)\end{aligned}\quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega_i} &= -g_{\omega b}\gamma_\mu\bar{\psi}_b\psi_b + m_\omega^2\omega_\mu \\ &+ \frac{1}{6}\xi g_{\omega b}^4\omega_\mu(\omega_\mu\omega^\mu) \\ &+ 2\Lambda_\omega g_{\rho b}^2g_{\omega b}^2\vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu\omega_\mu \\ \partial_\lambda\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda\omega_i)} &= \partial^\mu\partial_\mu\omega_\nu - \partial^\mu\partial_\nu\omega_\mu\end{aligned}\quad (\text{C.22})$$

A equação de Euler-Lagrange fica:

$$\begin{aligned} & -g_{\omega b}\gamma_\mu\bar{\psi}_b\psi_b + m_\omega^2\omega_\mu + \frac{1}{6}\xi g_{\omega b}^4\omega_\mu(\omega_\mu\omega^\mu) \\ & + 2\Lambda_\omega g_{\rho b}^2 g_{\omega b}^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu \omega_\mu - (\partial^\mu \partial_\mu \omega_\nu - \partial^\mu \partial_\nu \omega_\mu) = 0 \end{aligned} \quad (C.23)$$

Aplicando o campo médio:

$$\begin{aligned} m_\omega^2 < \omega_0 > &= \sum_b g_{\omega b} n_b^s - \frac{1}{3!} \xi g_{\omega b}^4 \omega_0^3 \\ &- 2\Lambda_\omega g_{\rho b}^2 g_{\omega b}^2 \rho_0^2 < \omega_0 > \end{aligned} \quad (C.24)$$

Da mesma forma feita para o campo  $\omega^\mu$ , uma lagrangeana que contenha todos os termos  $\vec{\rho}_\mu$  pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{\rho}_\mu} &= -g_{\rho b}\tau_{3b}\gamma_\mu\vec{\rho}^\mu\bar{\psi}_b\psi_b \\ &- \frac{1}{4}[(\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu)(\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu)] \\ &+ \frac{1}{2}m_{\vec{\rho}}^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu + \Lambda_\omega g_{\rho}^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu g_\omega^2 \omega_\nu \omega^\nu. \end{aligned} \quad (C.25)$$

Usando um raciocínio análogo àquele utilizado no cálculo do campo  $\omega_\mu$ , é possível mostrar que:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\rho}^\mu}(\vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu) = 2\vec{\rho}_\mu \quad (C.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\rho}_i} &= -g_{\rho b}\tau_{3b}\gamma_\mu\bar{\psi}_b\psi_b + m_{\vec{\rho}}^2 \vec{\rho}_\mu \\ &+ 2\Lambda_\omega g_{\rho b}^2 g_{\omega b}^2 \omega_\nu \omega^\nu \vec{\rho}_\mu \end{aligned} \quad (C.27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial(\partial_\lambda \vec{\rho}_i)} \{[(\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu) - g_{\rho N}(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu)] \\ & [(\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu) - g_{\rho N}(\vec{\rho}^\mu \times \vec{\rho}^\nu)]\} \\ &= 4(\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu) \end{aligned} \quad (C.28)$$

A equação de Euler-Lagrange fica:

$$\begin{aligned} & -g_{\rho b}\tau_{3b}\gamma_{\mu}\bar{\psi}_b\psi_b + m_{\rho}^2\vec{\rho}_{\mu} \\ & + 2\Lambda_{\omega}g_{\rho b}^2g_{\omega b}^2\omega_{\nu}\omega^{\nu}\vec{\rho}_{\mu} - (\partial^{\mu}\partial_{\mu}\vec{\rho}_{\nu} - \partial^{\mu}\partial_{\nu}\vec{\rho}_{\mu}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

rearranjando a equação acima:

$$\begin{aligned} & + m_{\rho}^2\vec{\rho}_{\mu} = g_{\rho b}\tau_{3b}\gamma_{\mu}\bar{\psi}_b\psi_b \\ & - 2\Lambda_{\omega}g_{\rho b}^2g_{\omega b}^2\omega_{\nu}\omega^{\nu}\vec{\rho}_{\mu} + (\partial^{\mu}\partial_{\mu}\vec{\rho}_{\nu} - \partial^{\mu}\partial_{\nu}\vec{\rho}_{\mu}). \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Por fim aplicamos o campo médio e teremos:

$$m_{\rho}^2 \langle \rho_0 \rangle = \sum_b g_{\rho b}\tau_{3b}n_b^s - 2\Lambda_{\omega}g_{\rho b}^2g_{\omega b}^2\omega_0^2 \langle \rho_0 \rangle \quad (\text{C.31})$$

## **APÊNDICE D – As Equações de Estado**





Para o cálculo da densidade de energia vamos usar a densidade lagrangiana livre de Dirac [70, 71]:

$$\mathcal{L}_b = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_b)\psi, \quad (\text{D.1})$$

em que  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  é o espinor adjunto à  $\psi$  e  $\gamma^\mu$  é a matriz de Dirac com  $\gamma^0 = \hat{\beta}$  e  $\gamma^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^i$ . Podemos então reescrever a densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L}_b = \psi^\dagger i\partial_t \psi + \psi^\dagger i\gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi - m_b \psi^\dagger \gamma_0 \psi. \quad (\text{D.2})$$

Como  $\gamma_0 = \gamma^0$  e  $\partial_i = \partial/\partial x^i = (\vec{\nabla})i$ , se usarmos as matrizes  $\hat{\alpha}^i$ , e  $\hat{\beta}$  no lugar de  $\gamma^\mu$ , teremos:

$$\mathcal{L}_b = \psi^\dagger (i\partial_t - \hat{\alpha} \cdot \hat{p} - \hat{\beta}m_b)\psi. \quad (\text{D.3})$$

Aplicando então (D.1) à equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \quad (\text{D.4})$$

obteremos:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_b)\psi = 0 \quad (\text{D.5})$$

rearranjando seus termos, encontramos:

$$i\partial_t \psi = (\hat{\alpha} \cdot \hat{p} + \hat{\beta}m_b)\psi \equiv \hat{H}\psi \quad (\text{D.6})$$

Em que o termo entre parênteses é o próprio operador Hamiltoniano. Vamos agora calcular o tensor energia-momento para esta lagrangiana:

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \partial_\nu \bar{\psi} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (\text{D.7})$$

e teremos:

$$T_\nu^\mu = \bar{\psi} i\gamma^\mu \gamma_\nu \psi - g_{\mu\nu} \bar{\psi} i\gamma^\sigma \partial_\sigma \psi + g_{\mu\nu} m_b \bar{\psi} \psi. \quad (\text{D.8})$$

A densidade de energia é definida como  $\varepsilon = \langle T_0^0 \rangle$ , assim podemos mostrar que em termos da hamiltoniana livre de Dirac:

$$\varepsilon = \langle T_0^0 \rangle = \psi^\dagger (\hat{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_b) \psi = \psi^\dagger \hat{H} \psi. \quad (\text{D.9})$$

Mas de acordo com (D.6), temos que:

$$\varepsilon = \psi^\dagger i\partial_t \psi. \quad (\text{D.10})$$

Para a realização da operação acima vamos escrever novamente os operadores de campo dos bárions, agora com dependência temporal:

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, s} [u(\vec{p}, s) a_{\vec{p}, s} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \\ &\quad + v(-\vec{p}, s) b_{\vec{p}, s}^\dagger e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}] e^{-iEt} \\ \hat{\psi}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, s} [u^\dagger(\vec{p}, s) a_{\vec{p}, s}^\dagger e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \\ &\quad + v^\dagger(-\vec{p}, s) b_{\vec{p}, s} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}] e^{iEt}, \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

ao aplicarmos os operadores  $\psi$  e  $\psi^\dagger$  em (D.10) encontramos:

$$\varepsilon = E\psi^\dagger \psi. \quad (\text{D.12})$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}', s, s'} [a_{\vec{p}, s}^\dagger a_{\vec{p}', s'} e^{-i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{x}} \\ &\quad + b_{\vec{p}, s} b_{\vec{p}', s'}^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{x}}]. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Além disso, usando a definição da densidade vetorial:

$$n^v = \frac{B}{V} = \langle \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \rangle, \quad (\text{D.14})$$

a definição do número de bárions:

$$\hat{B} = \int_V \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} d^3x, \quad (\text{D.15})$$

e tomando as condições de normalização, ordenação normal e

$$\begin{aligned}
 a_{\vec{p},s}|F\rangle &= 0 & se\ |p| > p_F \\
 a_{\vec{p},s}^\dagger|F\rangle &= 0 & se\ |p| < p_F \\
 b_{\vec{p},s}|F\rangle &= 0 & \forall\ |p| \\
 a_{\vec{p},s}^\dagger a_{\vec{p},s}|F\rangle &= |F\rangle & se\ |p| < p_F,
 \end{aligned} \tag{D.16}$$

encontramos:

$$\varepsilon = E\psi^\dagger\psi = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p},s} E. \tag{D.17}$$

$E$  é o espectro de energia e também depende do momento  $\vec{p}$ , de modo que quando tomamos o limite da matéria infinita, e recorremos novamente ao fator de degenerescência encontramos:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^p E d^3p, \tag{D.18}$$

ou em coordenadas esféricas:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^p E p^2 dp. \tag{D.19}$$

O cálculo para léptons segue o mesmo raciocínio.

O cálculo da pressão pode ser efetuado se levarmos em conta a primeira lei da termodinâmica [72]:

$$dE = -pdV \quad ; \textit{Bfixo}. \tag{D.20}$$

Vamos considerar a expressão:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} &= \frac{\partial(E/V)}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial \rho_B} \\
 &= \left( -\frac{E}{V^2} + \frac{1}{V} \frac{\partial E}{\partial V} \right) \left( -\frac{V^2}{B} \right) = \frac{\varepsilon + P}{\rho_B},
 \end{aligned} \tag{D.21}$$

de modo que a pressão fica:

$$P = \rho_B \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} - \varepsilon. \tag{D.22}$$

Porém a densidade de energia depende do momento  $\mathbf{p}$ , de maneira que:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \rho_B}, \quad (\text{D.23})$$

vamos tomar uma densidade de energia do tipo:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{p_F} dpp^2 (p^2 + m_b^2)^{1/2}. \quad (\text{D.24})$$

Em que  $E = (p^2 + m^2)^{1/2}$ , sua derivada em relação ao momento fica:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = \frac{\gamma}{2\pi^2} p^2 (p^2 + m_b^2)^{1/2} \quad (\text{D.25})$$

Aplicando em (D.22), temos:

$$\begin{aligned} P &= \rho_B \left[ \frac{\gamma}{2\pi^2} p^2 (p^2 + m_b^2)^{1/2} \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \right] \\ &\quad - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{p_F} dpp^2 (p^2 + m_b^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

como já vimos a densidade bariônica é  $\rho_B = \frac{\gamma}{6\pi^2} p_F^3$ , e assim podemos escrever a expressão para o momento  $\mathbf{p}$  e sua derivada  $\partial \mathbf{p} / \partial \rho_B$ .

$$\begin{aligned} p &= \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{1/3} \rho_B^{1/3}; \\ \frac{\partial p}{\partial \rho_B} &= \frac{1}{3} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{1/3} \rho_B^{-2/3}. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Voltando então à (D.26) teremos:

$$\begin{aligned} P &= \rho_B \left[ \frac{\gamma}{2\pi^2} p^2 (p^2 + m_b^2)^{1/2} \frac{1}{3} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{1/3} \rho_B^{-2/3} \right] \\ &\quad - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{p_F} dpp^2 (p^2 + m_b^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

fazendo o produto das densidade bariônicas é fácil perceber que o momento  $\mathbf{p}$ , apresentado em (D.27) novamente aparece e a expressão acima

pode ser reescrita como:

$$P = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} p^3 (p^2 + m_b^2)^{1/2} - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{p_F} dp p^2 (p^2 + m_b^2)^{1/2}. \quad (\text{D.29})$$

lembrando que  $uv - \int v du = \int u dv$ , ao fazermos  $u = \frac{1}{3}p^3$ ,  $du = p^2 dp$ ,  $v = (p^2 + m^2)^{1/2}$  e  $dv = p(p^2 + m_b^2)^{-1/2}$  teremos:

$$P = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^p \frac{p^4}{(p^2 + m^2)^{1/2}} dp, \quad (\text{D.30})$$

como esperávamos [12]. Ou como usaremos daqui para frente:

$$P = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^p \frac{p^4}{E} dp, \quad (\text{D.31})$$

em que  $E$  é o espectro de energia calculado para cada caso avaliado.

Da mesma forma que calculamos uma expressão geral para a densidade bariônica tanto para partículas livres quanto para partículas sob a ação de um campo magnético, vamos agora calcular as expressões gerais para a densidade de energia e pressão de partículas submetidas a um campo magnético.

Utilizando-nos das propriedades de limite de matéria infinita para o caso com campo magnético dados pelas equações:  $\frac{1}{L_3} \sum_{p_3} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3$  e  $\frac{1}{L_2} \sum_{p_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{|Q|BL_1}{2}}^{\frac{|Q|BL_1}{2}} dp_2 = \frac{|Q|BL_1}{2\pi}$ , podemos definir:

$$\frac{1}{V} = \gamma \frac{1}{L_1} \frac{1}{L_2} \sum_{p_2} \frac{1}{L_3} \sum_{p_3}, \quad (\text{D.32})$$

além disso vamos considerar a expressão (D.17) para a densidade de energia. Assim teremos:

$$\varepsilon = E \psi^\dagger \psi = \gamma \frac{1}{L_1} \frac{1}{L_2} \sum_{p_2} \frac{1}{L_3} \sum_{p_3} E, \quad (\text{D.33})$$

ou ainda

$$\varepsilon = \frac{\gamma |Q|B}{(2\pi)^2} \int_0^{p_F} E dp_3. \quad (\text{D.34})$$

Calculamos a expressão para a pressão da mesma forma calculada anteriormente, ou seja, usaremos a expressão:

$$P = \rho_N \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_N} - \varepsilon, \quad (\text{D.35})$$

para isso faremos  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_N} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_3} \frac{\partial p_3}{\partial \rho_N}$  e usaremos o espectro de energia dado por

$E = \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2|Q|Bn}$ . Assim temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_3} &= \frac{\gamma|Q|B}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial p_3} \int_0^{p_F} \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2|Q|Bn} dp_3 \quad (\text{D.36}) \\ &= \frac{\gamma|Q|B}{(2\pi)^2} (p_3^2 + m^2 + 2|Q|Bn)^{1/2}. \end{aligned}$$

De volta à (D.35) teremos:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\gamma|Q|B}{(2\pi)^2} \left[ p_3(p_3^2 + m^2 + 2|Q|Bn)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{p_F} (p_3^2 + m^2 + 2|Q|Bn)^{1/2} dp_3 \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

Usando a identidade  $uv - \int v du = \int u dv$ , teremos:

$$P = \frac{\gamma|Q|B}{(2\pi)^2} \int_0^{p_F} \frac{p_3^2}{E} dp_3, \quad (\text{D.38})$$

### D.0.1 Gás de nêutrons relativísticos

Apresentaremos também, como uma forma de comparação, o modelo de um gás de nêutrons relativísticos. Oppenheimer e Volkoff adotaram as equações de estado de um gás ideal de nêutrons como primeiro modelo para o cálculo de um modelo de estrela de nêutrons.

Aproveitando a expressão  $n^v = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 d^2p$ , é fácil calcular a densidade bariônica para um gás livre de nêutrons, somando sobre todos os valores de spin:

$$\rho_n = \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \frac{1}{3} p_{F,s}^3. \quad (\text{D.39})$$

Já mostramos com a equação (D.19) que para calcular a densidade de energia para  $E = \sqrt{p_n^2 + m_n^2}$ , que é o espectro de energia desse gás de nêutrons devemos fazer:

$$\varepsilon_n = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{p_n} \sqrt{p_n^2 + m_n^2} p_n^2 dp_n, \quad (\text{D.40})$$

fazendo  $p_n = m_n \tan \theta$  e  $dp_n = m_n \sec^2 \theta d\theta$  teremos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_s \left[ p_{F,s}^n E_F^{n3} - \frac{1}{2} m_n^2 p_{F,s}^n E_F^n \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} m_n^4 \ln \left| \frac{E_F^n + p_{F,s}^n}{m_n} \right| \right] \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

O cálculo da pressão é feito a partir da equação (D.31), escrevendo:

$$P_n = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{p_n} \frac{p_n^2}{\sqrt{p_n^2 + m_n^2}} p_n^2 dp_n, \quad (\text{D.42})$$

repetindo a substituição acima, ficamos com:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{12\pi^2} \sum_s \left[ p_{F,s}^n E_F^{n3} - \frac{5}{2} m_n^2 p_{F,s}^n E_F^n \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} m_n^4 \ln \left| \frac{E_F^n + k_{F,s}^n}{m_n} \right| \right] \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

### D.0.2 Gás de Fermi formado por nucleons e léptons

Porém o modelo adotado por Oppenheimer e Volkoff é instável devido ao princípio de exclusão de Pauli. Em matéria densa alguns nêutrons teriam energia suficiente para decaírem em prótons e léptons e ao levarmos em consideração esse equilíbrio- $\beta$  devemos incluir às equações de estado as expressões para prótons e léptons. Para esse caso a o fator de degenerescência  $\gamma = 2$  e a expressões das somas sobre os spins dos nucleons ( $n, p$ ) e léptons ( $e, \mu$ ), com  $i = n, p, e, \mu$  fica:

$$\rho_i = \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \frac{1}{3} p_{F,s}^{i3} \quad (\text{D.44})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_s \left[ p_{F,s}^i E_F^{i3} - \frac{1}{2} m_i^2 p_{F,s}^i E_F^i \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} m_i^4 \ln \left| \frac{E_F^i + p_{F,s}^i}{m_i} \right| \right] \end{aligned} \quad (\text{D.45})$$

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{12\pi^2} \sum_s \left[ p_{F,s}^i E_F^{i3} - \frac{5}{2} m_i^2 p_{F,s}^i E_F^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} m_i^4 \ln \left| \frac{E_F^i + p_{F,s}^i}{m_i} \right| \right] \end{aligned} \quad (\text{D.46})$$

### D.0.3 Gás de nêutrons relativísticos em equilíbrio- $\beta$ , campo magnético e momento magnético anômalo

Primeiramente vamos apresentar o cálculo da densidade de energia e da pressão para os léptons em um gás em equilíbrio- $\beta$ , campo magnético e sem momento magnético anômalo.

A temperatura zero e na presença de um campo magnético constante  $\mathbf{B}$  a densidade de partículas carregadas pode ser escrita como [26]:

$$\rho_{i=l,p} = \frac{|Q_l|B}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_s \int_0^{p_{F,n,s}^i} dp_3^i, \quad (\text{D.47})$$

em que  $\sum_{n=0}^{n_{max}}$  é uma soma sobre os níveis de Landau e  $\sum_s$  é uma soma sobre os spins. A integral nos deixa com:

$$\rho_l = \frac{|Q_l|B}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_s p_{F,n,s}^l. \quad (\text{D.48})$$

De modo que a densidade de energia  $\epsilon$  é dada pela mesma soma sobre a energia  $E$ :

$$\varepsilon_l = \frac{|Q_l|B}{2\pi^2} \int_0^{p_{F,n,s}^l} E_{n,s}^l dp_3^l \quad (\text{D.49})$$

A energia para os léptons em um campo magnético  $B$  em termos dos níveis de Landau é:

$$E_{n,s}^l = \sqrt{p_3^2 + m_l^2 + 2|Q_l|Bn}. \quad (\text{D.50})$$



Assim (D.49) fica:

$$\varepsilon_l = \frac{|Q_l|B}{2\pi^2} \int_0^{p_{F,n,s}^l} \sqrt{p_3^2 + m_l^2 + 2|Q_l|Bn} dp_3^l \quad (\text{D.51})$$

Essa integral é resolvida com uma substituição trigonométrica, do tipo  $\sqrt{u^2 + a^2}$ , o que nos deixa com:

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_s \frac{|Q_l|B}{4\pi^2} \left[ p_{F,n,s}^l E_F^l \right. \\ &\quad \left. + (m_l^2 + 2|Q_l|Bn) \ln \left| \frac{p_{F,n,s}^l + E_F^l}{\sqrt{m_l^2 + 2|Q_l|Bn}} \right| \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.52})$$

Calculamos também a pressão para esses léptons, e para isso tomamos, como foi demonstrado:

$$P_l = \frac{|Q_l|B}{2\pi^2} \int_0^{p_{F,n,s}^l} \frac{p_3^{l2}}{E} dp_3^l, \quad (\text{D.53})$$

substituindo a energia:

$$P_l = \frac{1}{3} \frac{|Q_l|B}{2\pi^2} \int_0^{p_{F,n,s}^l} \frac{p_3^{l2}}{\sqrt{p_3^{l2} + m_l^2 + 2|Q_l|Bn}} dp_3^l. \quad (\text{D.54})$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} P_l &= \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_s \frac{1}{3} \frac{|Q_l|B}{4\pi^2} \left[ p_{F,n,s}^l E_F^l \right. \\ &\quad \left. + (m_l^2 + 2|Q_l|Bn) \ln \left| \frac{p_{F,n,s}^l + E_F^l}{\sqrt{m_l^2 + 2|Q_l|Bn}} \right| \right] \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

Vamos agora ao cálculo da densidade de energia e da pressão para os prótons em um gás em equilíbrio- $\beta$ , campo magnético e momento magnético anômalo. Novamente tomamos a expressão para a densidade de energia:

$$\varepsilon_p = \frac{|Q_p|B}{2\pi^2} \int_0^{p_{F,n,s}^p} E_{n,s}^p dp_3^p, \quad (\text{D.56})$$

ao substituímos o espectro de energia para prótons sob a influência de

um campo magnético e levando em consideração o momento magnético anômalo, encontramos

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \frac{|Q_p|B}{2\pi^2} \int_0^{p_{F,n,s}^p} dp_3^p \\ &\times \sqrt{p_3^{p2} + (\sqrt{m_p^2 + 2Q_p B n} - s\mu_N k_p B)^2}. \end{aligned} \quad (D.57)$$

Repare que se fizermos  $\mathbf{k}_p = \mathbf{0}$ , a equação acima se torna idêntica à equação (D.51). Após realizarmos a integração com a técnica convenientemente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_s \frac{|Q_p|B}{4\pi^2} \left[ p_{F,n,s}^p E_F^p \right. \\ &+ (\sqrt{m_p^2 + 2Q_p B n} - s\mu_N k_p B)^2 \\ &\times \ln \left| \frac{p_{F,n,s}^p + E_F^p}{(\sqrt{m_p^2 + 2Q_p B n} - s\mu_N k_p B)} \right| \Big], \end{aligned} \quad (D.58)$$

Calculamos também a pressão correspondente a esses prótons nesse gás, para isso utilizamos a expressão deduzida para esse cálculo:

$$P_p = \frac{1}{3} \frac{Q_p B}{2\pi^2} \int_0^{p_{F,n,s}^p} \frac{p_3^{p2}}{E} dp_3^p, \quad (D.59)$$

em que  $E$  é o espectro de energia que já apresentamos anteriormente. Teremos então:

$$\begin{aligned} P_p &= \frac{1}{3} \frac{Q_p B}{2\pi^2} \int_0^{p_{F,n,s}^p} dp_3^p \\ &\times \frac{p_3^{p2}}{\sqrt{p_3^{p2} + (\sqrt{m_p^2 + 2Q_p B n} - s\mu_N k_p B)^2}}, \end{aligned} \quad (D.60)$$

Novamente se compararmos a equação acima com a equação (D.55), encontraremos a mesma forma se fizermos com  $\mathbf{k}_p = \mathbf{0}$ . Novamente essa integral é facilmente encontrada nos livros de calculo, assim ficamos

com:

$$\begin{aligned}
 P_p &= \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_s \frac{1}{3} \frac{Q_p B}{4\pi^2} \left[ p_{F,n,s}^p E_F^p \right. \\
 &\quad + (\sqrt{m_p^2 + 2Q_p B n} - s\mu_N k_p B)^2 \\
 &\quad \left. \times \ln \left| \frac{p_{F,n,s}^p + E_F^p}{\sqrt{m_p^2 + 2Q_p B n} - s\mu_N k_p B} \right| \right]
 \end{aligned} \tag{D.61}$$

Finalmente apresentamos o cálculo da densidade de energia e da pressão para os nêutrons em um gás em equilíbrio- $\beta$ , campo magnético e momento magnético anômalo.

Nêutrons em um campo magnético não sofrem deflexão devido à sua carga nula, isso implica que não se alinham ao campo e possuem momento em todas as direções. O espectro de energia para esses nêutrons então é [26]:

$$E_F^n = \sqrt{p_3^2 + (\sqrt{m_n^2 + p_1^2 + p_2^2} - s\mu_N k_n B)^2}, \tag{D.62}$$

os momentos nas direções nas direções **1** e **2** para prótons e léptons são suprimidos devido à força de Lorentz [73], porém isso não ocorre com os nêutrons. Com a inclusão do momento magnético anômalo para o nêutron a integral sobre o espaço de fases para qualquer quantidade termodinâmica  $Q$  é mais facilmente calculada se notarmos que a temperatura zero ela se torna a integral sobre todos os momentos contidos na superfície de Fermi definida por:

$$E_F^n = E_F^n(p_1, p_2, p_3). \tag{D.63}$$

Separamos as componentes perpendiculares e paralelas ao campo e calculamos:

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \int_0^b p_\perp dp_\perp \int_0^a dp_\parallel Q, \tag{D.64}$$

aqui a superfície de Fermi é delimitada por:

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{E_F^{n2} - (\sqrt{p_\perp^2 + m_n^2} - s\mu_N k_n B)^2}, \\
 b &= \sqrt{(E_F^n - s\mu_N k_n B)^2 - m_n^2}.
 \end{aligned} \tag{D.65}$$

Usaremos a substituição:

$$x = \sqrt{p_{\perp}^2 + m_n^2} + s\mu_N k_n B, \quad (\text{D.66})$$

reescrevendo a expressão acima encontramos:

$$\begin{aligned} p_{\perp}^2 &= (x - s\mu_N k_n B)^2 - m_n^2 \\ 2p_{\perp} dp_{\perp} &= 2(x - s\mu_N k_n B) dx \\ p_{\perp} dp_{\perp} &= x dx - s\mu_N k_n B dx. \end{aligned} \quad (\text{D.67})$$

Ao avaliarmos os limites de integração e aplicarmos a expressão acima em (D.64), teremos:

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \left( \int_{\overline{m}}^{E_F^n} x dx \int_0^{(E_F^{n2} - x^2)^{1/2}} dp_{||} Q \right) \\ &\quad - s\mu_N k_n B \left( \int_{\overline{m}}^{E_F^n} dx \int_0^{(E_F^{n2} - x^2)^{1/2}} dp_{||} Q \right), \end{aligned} \quad (\text{D.68})$$

em que  $\overline{m} = m_n - s\mu_N k_n B$ .

Vamos então calcular a densidade de nêutrons sob essas condições;

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \underbrace{\left( \int_{\overline{m}}^{E_F^n} x dx \int_0^{(E_F^{n2} - x^2)^{1/2}} dp_{||} \right)}_A \\ &\quad \underbrace{- s\mu_N k_n B \left( \int_{\overline{m}}^{E_F^n} dx \int_0^{(E_F^{n2} - x^2)^{1/2}} dp_{||} \right)}_B, \end{aligned} \quad (\text{D.69})$$

é fácil notar que as integrais de  $A$  e  $B$  em (D.69) são trigonométricas, o que nos deixa com:

$$A = \frac{1}{3} p_{F,n,s}^3, \quad (\text{D.70})$$

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{1}{2}s\mu_N k_n B E_F^{n2} \\
&\times \left( \arcsin \frac{\bar{m}}{E_F^n} - \frac{\pi}{2} + \frac{\bar{m}}{E_F^{n2}} \sqrt{E_F^n - \bar{m}} \right) \\
&= -\frac{1}{2}s\mu_N k_n B \left[ E_F^{n2} \left( \arcsin \frac{\bar{m}}{E_F^n} - \frac{\pi}{2} \right) + \bar{m} p_{F,n,s}^n \right].
\end{aligned} \tag{D.71}$$

E assim encontramos:

$$\begin{aligned}
\rho_n &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \frac{1}{3} p_{F,n,s}^{n3} \\
&- \frac{1}{2}s\mu_N k_n B \left[ \bar{m} p_{F,n,s}^n + E_F^{n2} \left( \arcsin \frac{\bar{m}}{E_F^n} - \frac{\pi}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{D.72}$$

Podemos notar que o termo  $\mathbf{A}$  nos fornece a densidade de nêutrons para o caso em que o momento magnético anômalo  $\mathbf{k}_n$  é nulo.  $\mathbf{B}$  por outro lado, fornece à expressão da densidade um termo adicional quando consideramos o tal momento.

Para o cálculo da densidade de energia faremos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \left[ \overbrace{\int_{\bar{m}}^{E_F^n} x dx \int_0^{(E_F^{n2} - x^2)^{1/2}} dp_{||} E_F^n}^C \right. \\
&\quad \left. - s\mu_N k_n B \underbrace{\left( \int_{\bar{m}}^{E_F^n} dx \int_0^{(E_F^{n2} - x^2)^{1/2}} dp_{||} \right)}_D \right],
\end{aligned} \tag{D.73}$$

as integrais de  $C$  e  $D$  na expressão (D.73) também são trigonométricas e ficam:

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} E_F^{n3} p_{F,n,s}^n - \frac{1}{4} \bar{m}^2 p_{F,n,s}^n E_F^n \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \bar{m}^4 \ln \left| \frac{E_F^n + p_{F,n,s}^n}{\bar{m}} \right| \right),
\end{aligned} \tag{D.74}$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} E_F^{n3} \left( \arcsin \frac{\bar{m}}{E_F^n} - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \bar{m} p_{F,n,s}^n E_F^n + \frac{1}{3} \bar{m}^3 \ln \left| \frac{E_F^n + p_{F,n,s}^n}{\bar{m}} \right| \right].
\end{aligned} \tag{D.75}$$

Somando os termos  $C$  e  $D$  teremos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_s \frac{1}{2} E_F^{n3} p_{F,n,s}^n \\
&\quad - \frac{2}{3} s \mu_N k_n B E_F^{n3} \left( \arcsin \frac{\bar{m}}{E_F^n} - \frac{\pi}{2} \right) \\
&\quad - \left( \frac{1}{3} s \mu_N k_n B + \frac{1}{4} \bar{m} \right) \left[ \bar{m} p_{F,n,s}^n E_F^n + \bar{m}^3 \ln \left( \left| \frac{E_F^n + p_{F,n,s}^n}{\bar{m}} \right| \right) \right]
\end{aligned} \tag{D.76}$$

A pressão provém da equação (D.22), e resulta em [74]:

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_s \left( \frac{1}{3} E_F^{n3} - \frac{5}{6} E_F^n \bar{m}^2 \right) p_{F,n,s}^n \\
&\quad + \frac{\bar{m}^4}{4} \ln \left( \frac{E_F^n + p_{F,n,s}^n}{E_F^n - p_{F,n,s}^n} \right) \\
&\quad - s \mu_N k_n B \left[ \left( \frac{\bar{m}^3}{2E_F^n} - \frac{25\bar{m}E_F^n}{18} \right) p_{F,n,s}^n \right. \\
&\quad + \frac{\bar{m} p_{F,n,s}^{n2}}{18E_F^n} + \frac{\bar{m}^3}{3} \ln \frac{E_F^n + p_{F,n,s}^n}{p_{F,n,s}^n} \\
&\quad \left. + \frac{E_F^n \bar{m}^2}{6} \arcsin \frac{p_{F,n,s}^n}{E_F^n} \right]
\end{aligned} \tag{D.77}$$

Para todos os casos acima, considerando bárions  $\mathbf{b}$  e léptons  $\mathbf{l}$  teremos  $\varepsilon = \sum_{b,l} \varepsilon_j$  e  $\mathbf{P} = \sum_{b,l} \mathbf{P}_j$ . É evidente que ao considerarmos um cenário sem o momento magnético anômalo, tudo o que devemos fazer é a redução  $\mathbf{K}_{n,p} = \mathbf{0}$  para obtermos as equações de estados relacionadas.

## **APÊNDICE E – Tópicos em relatividade geral.**





## E.1 MÉTRICA ISOTRÓPICA ESTÁTICA GERAL.

Será importante definir uma métrica para o espaço de variedade que usaremos em nosso cálculo, como veremos é ela quem portará as informações sobre o ritmo em que os relógios contam o tempo e também as distâncias entre determinados pontos. A métrica mais geral para representar um campo gravitacional isotrópico e estático. Intervalo de tempo próprio mais geral

$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - 2E(r)dt\vec{x} \cdot d\vec{x} - D(r)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 - C(r)dx^2, \quad (\text{E.1})$$

em que  $F(r), E(r), D(r), C(r)$  são funções a serem determinadas. Definimos:

$$\begin{aligned} r &\equiv (\vec{x} \cdot \vec{x})^{1/2} \\ \vec{x} \cdot d\vec{x} &= x^1 dx^1 + x^3 dx^3 + x^3 dx^3. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Vamos reescrever  $\vec{x}$  em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin \theta \cos \psi \\ x^2 &= r \sin \theta \sin \psi \\ x^3 &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

De forma generalizada, em coordenadas curvilíneas o vetor de distância diferencial  $d\mathbf{r}$  pode ser escrito como:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1} h_i dq_i \hat{q}_i, \quad (\text{E.4})$$

em que os  $h_i$  são os fatores de escala e  $q_i$  s coordenadas generalizadas [75]. Além disso é possível mostrar que  $h_r = 1, h_\theta = r, h_\psi = r \sin \theta$ . E para nosso caso teremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \sin \theta \hat{r} + r \sin \theta \sin \psi \hat{\theta} + r \cos \theta \hat{\psi} \\ d\mathbf{r} &= dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\psi \hat{\psi}. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= F(r)dt^2 - (2rE(r)dt dr + r^2 D(r)dr^2) \\ &\quad - C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2). \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

A partir de agora vamos definir uma nova coordenada temporal em termos da variável temporal anterior e de uma função arbitrária que dependa da posição:

$$\begin{aligned} t' &\equiv t + \Phi(r) \\ dt' &= dt, \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

o uso dessa nova coordenada é importante pois ela nos permite eliminar os termos fora da diagonal principal na métrica a ser calculada ao definirmos sua derivada em relação à  $r$ :

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{rE(r)}{F(r)}. \quad (\text{E.8})$$

Se fizermos:

$$\frac{d}{dr}t = \frac{d}{dr}(t' - \Phi(r)) = -\frac{d\Phi(r)}{dr}, \quad (\text{E.9})$$

utilizando a definição acima, teremos:

$$\frac{d}{dr}t = \frac{1}{2} \frac{rE(r)}{F(r)}, \quad (\text{E.10})$$

ou ainda:

$$\frac{E(r)}{F(r)} = \frac{2}{r} \frac{d}{dr}t. \quad (\text{E.11})$$

Multiplicando os dois lados da expressão acima por  $E(r)$ :

$$2 \frac{E(r)}{r} \frac{dt}{dr} = \frac{E^2(r)}{F(r)}, \quad (\text{E.12})$$

somando agora  $D(r)$  nos dois lados da equação:

$$2 \frac{E(r)}{r} \frac{dt}{dr} + D(r) = \left( D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right). \quad (\text{E.13})$$

Vamos então multiplicar os dois lados da equação acima por  $r^2 dr^2$ :

$$r^2 \left( 2 \frac{E(r)}{r} \frac{dt}{dr} + D(r) \right) dr^2 = r^2 \left( D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right) dr^2, \quad (\text{E.14})$$

de maneira que ficaremos com:

$$2E(r)r dt dr + r^2 D(r) dr^2 = r^2 \left( D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right) dr^2. \quad (\text{E.15})$$

Definindo  $G(r) \equiv r^2 \left( D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right)$ , lembrando a nova definição temporal e voltando à equação (E.6) teremos:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= F(r) dt'^2 - G(r) dr^2 \\ &\quad - C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2). \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Vamos ainda definir uma nova coordenada radial em termos da função  $C(r)$ , fazendo:

$$\begin{aligned} r'^2 &\equiv C(r)r^2 \\ r' &\equiv \sqrt{C(r)} r \\ dr' &= \frac{r}{2\sqrt{C(r)}} dC(r) + \sqrt{C(r)} dr \\ B(r') &\equiv F(r). \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

A equação (E.16) poderá ser reescrita como:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= B(r') dt'^2 - (G(r) + C(r)) dr^2 \\ &\quad - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2). \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Vamos agora definir mais uma variável, para que a expressão acima se torne função de  $r'$  e não mais de  $r$ , para isso faremos:

$$A(r') dr'^2 = (G(r) + C(r)) dr^2, \quad (\text{E.19})$$

que também pode ser escrito como:

$$A(r') = (G(r) + C(r)) \frac{dr^2}{dr'^2}, \quad (\text{E.20})$$

ou ainda:

$$A(r') = C(r) \left( 1 + \frac{G(r)}{C(r)} \right) \left( \frac{dr'}{dr} \right)^{-2}. \quad (\text{E.21})$$

Com uma simples manobra matemática é possível mostrar que:

$$\begin{aligned} A(r') &= C(r) \left( 1 + \frac{G(r)}{C(r)} \right) \\ &\times \left[ \frac{\sqrt{C(r)}}{dr} \left( \frac{r}{2C(r)} dC(r) + dr \right) \right]^{-2}, \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

e ainda que:

$$A(r') = \left( 1 + \frac{G(r)}{C(r)} \right) \left( 1 + \frac{r}{2C(r)} \frac{dC(r)}{dr} \right)^{-2}. \quad (\text{E.23})$$

Já podemos abandonar o uso do índice “ ’ ” e reescrever a equação (E.18) como:

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 - \sin^2\theta d\psi^2). \quad (\text{E.24})$$

Da equação acima vemos então que os componentes do novo tensor métrico são:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -B(r) & g_{rr} &= A(r) & g_{\theta\theta} &= r^2 \\ g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2\theta & g_{\mu\nu} &= 0 & \text{para } \mu &\neq \nu. \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Devemos notar que a forma contravariante desse tensor métrico será  $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$ , e seu determinante será  $\det(g) = r^4 A(r) B(r) \sin^2\theta$ . Como dito anteriormente, um estudo das coordenadas curvilíneas é importante para o desenvolvimento matemático que se segue, com base nesse estudo podemos apresentar o elemento de volume em coordenadas curvilíneas [75]:

$$dv = \sqrt{g} \, dr d\theta d\phi = r^2 \sqrt{A(r)B(r)} \sin\theta \, dr d\theta d\phi. \quad (\text{E.26})$$

A conexão afim pode ser considerada um objeto geométrico que conecta os dois espaços a que nos referíamos anteriormente, o localmente plano, como aquele descrito pelo espaço euclidiano, e o globalmente curvo, descrito pelo espaço de Riemann.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right), \quad (\text{E.27})$$

O cálculo para todas as variáveis de espaço-tempo é cansativo e exige

paciência, mas é possível perceber que  $g^{\lambda\rho} = 0$  para  $\lambda \neq \rho$ , isso pode reduzir o tempo de trabalho. Por fim encontramos:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2A(r)} \frac{dA(r)}{dr} \\
 \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r \sin^2}{A(r)} \\
 \Gamma_{rr}^t &= -\frac{1}{2A(r)} \frac{dB(r)}{dr} \\
 \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta \cos\theta \\
 \Gamma_{\phi r}^\phi &= \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\theta\theta}^\phi &= \Gamma_{\theta\phi}^\phi = -\cot\theta \\
 \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \\
 \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{A(r)}
 \end{aligned} \tag{E.28}$$

Vamos agora calcular as expressões dos tensores de Ricci para nossa métrica, cuja forma é  $R_{ab} = \partial_b \Gamma_{ac}^c - \partial_c \Gamma_{ab}^c + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^c - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^c$ , reescrevendo-a com a notação que temos usado até aqui nessa seção:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\eta\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\eta\lambda}^\lambda. \tag{E.29}$$

Para cada um dos índices, após um trabalho exaustivo de substituição dos índices na equação (E.29) teremos:

$$R_{\psi\psi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \tag{E.30}$$

$$R_{tt} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4} \left( \frac{B'(r)}{A(r)} \right) \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{B'(r)}{A(r)} \right)$$

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4} \left( \frac{B'(r)}{B(r)} \right) \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} \right)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A(r)} \left( -\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)}.$$

onde as demais combinações de índices desaparecem, pois  $R_{\mu\nu} = 0$  para  $\mu \neq \nu$ .

Nossa intenção é descrever uma porção de matéria e para isso usaremos as ferramentas para o estudo da mecânica dos fluidos, particularmente os relativísticos [76]. O tensor energia-momento é capaz de descrever esses fluidos de forma bastante completa, ele contém informações sobre a densidade de energia contidas no fluido, as pressões relacionadas, o fluxo dessa energia, a densidade de momento, além das forças de cisalhamento. Porém faremos uma aproximação bastante simplificada quando comparada ao potencial desse tensor, vamos tomar um fluido dito perfeito<sup>3</sup>, ou seja, estático e isotrópico de modo que quando tomado sob a ótica do espaço-tempo curvo esse tensor deve ser fonte de campo gravitacional. Definimos então o tensor energia-momento da seguinte forma:

$$T^{\mu\nu} \equiv (\rho + \frac{p}{c^2})u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (\text{E.31})$$

ou ainda se fizermos  $\rho = \varepsilon/c^2$

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{c^2}(\varepsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (\text{E.32})$$

Para um sistema de coordenadas euclidiano, com um espaço-tempo plano nosso tensor se reduz à:

$$T^{\mu\nu} \equiv (\rho + \frac{p}{c^2})u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}, \quad (\text{E.33})$$

da mesma maneira, se fizermos  $\rho = \varepsilon/c^2$

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{c^2}(\varepsilon + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}, \quad (\text{E.34})$$

Em nossa aproximação consideramos o fluido como estático, ou seja, embora as partículas que compoem o dito fluido movam-se em velocidade consideravelmente alta, comparadas com a da luz, o fluido como um todo permanece estático. Assim podemos definir o quadrivetor velocidade  $u^\mu \equiv (c, 0)$ , onde  $u^0 = c$  e  $u^\alpha = 0$ . Nosso tensor é

---

<sup>3</sup>Um fluido perfeito é um meio completamente caracterizado por sua densidade de energia  $\varepsilon$  e pressão  $P$ , além disso sua pressão é isotrópica no referencial de repouso, não há cisalhamento tão pouco transporte de calor. Se, a cada ponto, o fluido e um observador movem-se com a mesma velocidade  $v$ , este verá à sua volta um meio isotrópico definido a cada ponto pelo tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$ .

ainda definido em termos da densidade de energia  $\varepsilon$  da pressão  $p$  do fluido, além da métrica de Minkowski  $\eta^{\mu\nu}$ . A forma matricial do tensor é dada por:

$$T^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (\text{E.35})$$

É interessante perceber que quando nos encontramos numa região vazia do espaço espaço onde  $T^{\mu\nu} = 0$ , a equação  $R^{\mu\nu} = k(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg^{\mu\nu})$  implicará que  $R^{\mu\nu} = 0$ . Vamos então voltar nossa atenção às três primeiras equações em (E.30), pela condição de espaço vazio teremos:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4}\left(\frac{B'(r)}{A(r)}\right)\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) \\ &\quad - \frac{1}{r}\left(\frac{B'(r)}{A(r)}\right) = 0 \\ R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4}\left(\frac{B'(r)}{B(r)}\right)\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) \\ &\quad - \frac{1}{r}\left(\frac{A'(r)}{A(r)}\right) = 0 \\ R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{r}{2A(r)}\left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) + \frac{1}{A(r)} = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

Multiplicando  $\frac{A(r)}{B(r)}$  pela equação  $R_{tt}$  e somando esse resultado à  $R_{rr}$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{B'(r)}{B(r)} + \frac{A'(r)}{A(r)} &= 0 \\ A(r)B'(r) + A'(r)B(r) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

Como a linha representa uma derivada em relação à  $r$ , a equação acima é uma regra da cadeia da derivada do produto das duas funções, isso mostra que  $A(r)B(r) = \text{constante}$ . Segundo a suposição de que o espaço deve ser assintoticamente plano e observando as unidades na expressão de tempo próprio vemos que  $r \rightarrow \infty$ ,  $A(r) \rightarrow 1$  e  $B(r) \rightarrow c^2$ , assim teremos:

$$A(r) = \frac{c^2}{B(r)}. \quad (\text{E.38})$$

Aplicando a equação (E.38) no termo  $R_{\theta\theta} = 0$  teremos:

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{rB(r)}{2c^2} \left[ c^2 \left( \frac{B'(r)}{B^2(r)} \right) \left( \frac{B(r)}{c^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{B'(r)}{B(r)} + \frac{B(r)}{c^2} \right] = 0 \\ R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{rB'(r)}{c^2} + \frac{B(r)}{c^2} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.39})$$

por fim:

$$rB'(r) + B(r) = c^2. \quad (\text{E.40})$$

A relação (E.40) pode ser reescrita como uma derivada em relação à  $r$ :

$$\frac{d(rB(r))}{dr} = c^2, \quad (\text{E.41})$$

que quando integrada nos dá:

$$\begin{aligned} rB(r) &= c^2(r + k) \\ B(r) &= c^2 \left( 1 + \frac{k}{r} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.42})$$

Em que  $k$  é uma constante de acoplamento a ser determinada. Voltando à (E.38):

$$A(r) = \left( 1 + \frac{k}{r} \right)^{-1}. \quad (\text{E.43})$$



## E.2 A EQUAÇÃO TOLMAN, OPPENHEIMER, VOLKOFF

Vamos tomar agora os índices  $\theta$  das equações (E.30) e  $R^{\mu\nu} = k(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg^{\mu\nu})$ , teremos:

$$\begin{aligned} -1 + \frac{r}{2A(r)} \left( -\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)} \\ = -\frac{8\pi G}{c^4} \left( -p + \frac{\rho c^2}{2} \right) r^2, \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

lembrando da identidade (E.37), podemos reescrever a equação acima como:

$$-1 + \frac{r}{A(r)} \left( 2\frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left( -p + \frac{\rho c^2}{2} \right) r^2. \quad (\text{E.45})$$

Antes de continuar vamos calcular o termo  $\frac{B'(r)}{B(r)}$ , para isso vamos tomar a derivada covariante do tensor energia-momento definido pela equação (E.31) e igualá-lo a zero, isso nos dará um instantâneo do fluido, como se este estivesse em repouso, assim teremos:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= -\partial_\nu p g^{\mu\nu} + g^{-1/2} \partial_\nu g^{1/2} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu \\ &+ \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\nu u^\lambda = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.46})$$

Sabemos que  $B(r) = -g_{00}$  e de acordo com o teorema de Birkoff que  $B(r) \rightarrow c^2$ , ou seja  $u^0 = c = (B(r))^{1/2} = (-g_{00})^{1/2}$  e  $u^\alpha = 0 \forall \alpha \neq 0$ , por isso o segundo termo acima vai a zero e ficamos com:

$$-\partial_\nu p g^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\nu u^\lambda = 0. \quad (\text{E.47})$$

O segundo termo acima está ligado à força gravitacional agindo no sistema, lembrando que em um espaço vazio  $\eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\alpha = -1$ , na presença de um campo gravitacional teremos  $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\alpha = -1$ , de modo que se multiplicarmos a equação anterior por  $g_{\mu\lambda}$  teremos:

$$-\partial_\nu p g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\nu u^\lambda g_{\mu\lambda} = 0, \quad (\text{E.48})$$

fazendo  $\nu \rightarrow \lambda$  teremos:

$$-\partial_\lambda p - \Gamma_{\lambda\lambda}^\mu \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \quad (\text{E.49})$$

se tomarmos  $\Gamma_{00}^\mu$  na equação acima ficamos com:

$$-\partial_\lambda p = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00} \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right). \quad (\text{E.50})$$

A derivada quadridimensional pode ser interpretada como uma derivada em relação à  $\mathbf{r}$ , assim o termo  $\partial_\lambda = \frac{d}{dr}$ , assim para a expressão acima nos interessa notar que:

$$-\partial_\lambda p = -\frac{1}{2} \frac{1}{g_{\mu\lambda}} \partial_\lambda g_{00} \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right), \quad (\text{E.51})$$

e ainda que:

$$-\frac{2p'}{\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)} = \frac{g'_{00}}{g_{00}} = \frac{B'(r)}{B(r)}. \quad (\text{E.52})$$

Voltando para a equação (E.45) e aplicando (E.52),  $k = -\frac{2GM(r)}{c^2}$  e (E.43) teremos:

$$\begin{aligned} & -1 - \frac{2p'}{\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)} r \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right) \\ & + \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(-p + \frac{\rho c^2}{2}\right) r^2, \end{aligned} \quad (\text{E.53})$$

lembrando-se que  $M(r)$  é definido pela equação  $M(r) \equiv \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$ .

$$\begin{aligned} -2rp'(r) &= \left(\frac{p(r)}{c^2} + \rho(r)\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \\ &\times \left[ \frac{2GM(r)}{c^2 r} - \frac{8\pi G}{c^4} \left(-p(r) + \frac{\rho(r)c^2}{2}\right) r^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{E.54})$$

$$\begin{aligned} -2rp'(r) &= \left(1 + \frac{p(r)}{\rho(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \\ &\times \left\{ 2G\rho(r)M(r) \left[ \frac{c^2}{c^4 r} - \frac{4\pi r^3}{M(r)c^4 r} \left(-p(r) + \frac{\rho(r)c^2}{2}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.55})$$

$$\begin{aligned}
-rp'(r) &= \left(1 + \frac{p(r)}{\rho(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \\
&\times \left\{ \frac{G\rho(r)M(r)}{c^4 r} \left[ c^2 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)} - \frac{4\pi r^3 \rho(r)c^2}{2M(r)} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{E.56}$$

Aqui vamos tomar  $\rho(r) = 3M(r)/4\pi r^3$  no último termo, e teremos:

$$\begin{aligned}
-rp'(r) &= \left(1 + \frac{p(r)}{\rho(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \\
&\times \left\{ \frac{G\rho(r)M(r)}{c^4 r} \left[ c^2 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{6\pi r^3 \rho(r)}{2M(r)} \frac{2c^2}{3} + \frac{6\pi r^3 \rho(r)}{2M(r)} \frac{2c^2}{3} - \frac{2}{3}c^2 \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{E.57}$$

e por fim:

$$\begin{aligned}
\frac{dp(r)}{dr} &= -\frac{G\rho(r)c^2 M(r)}{c^4 r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\rho(r)c^2}\right) \\
&\times \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)c^2}\right].
\end{aligned} \tag{E.58}$$

Se tomarmos a notação natural, onde  $G = c = 1$ , e fazendo  $\varepsilon(r) = \rho(r)c^2$  é fácil mostrar que teremos:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{[p(r) + \varepsilon(r)][M(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r[r - 2M(r)]} \tag{E.59}$$



## REFERÊNCIAS

- [1] Kouveliotou C., Duncan R. C. and Thompson C., **Magnetar**. Sci. Am. Inc. (2003).
- [2] Duncan R. C., Thompson C., **Formation of Very Strongly Magnetized Neutron Stars: Implications for Gamma-Ray Bursts..** Astronomical Journal, Vol. 392, No. 1, pages L9?L13; June 10, 1992. Available at [makeashorterlink.com/?B16A425A2](http://makeashorterlink.com/?B16A425A2)
- [3] Kouveliotou C., Dieters S., Strohmayer T., Paradijs J. V., Fishman G. J., Meegan C. A., Hurley K., Kommers J., Smith I., Frail D. and Murakami T., **An X-ray Pulsar with a Superstrong Magnetic Field in the Soft Gamma- Ray Repeater SGR1806?20.** Nature, Vol. 393, pages 235?237; May 21, 1998
- [4] Capozzoli U., **No reino dos astrônomos cegos: Uma história da radioastronomia.** Editora Record, Rio de Janeiro, (2005).
- [5] Shapiro S.T., Teukolsky S.A., **Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars. The physics of Compact Objects.** Cornell University, John Wiley & Sons, Inc: New York, USA (2007)
- [6] Weinberg, S. **Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity.** 1<sup>o</sup> edição. Massachusetts Institute of Technology. John Wiley & Sons, Inc: New-York, USA (1972).
- [7] Strohmayer T. E., **Levantando a cortina das estrelas extremas..** Astronomy Brasil (2007).
- [8] Chung K.C., **Vamos Falar de Estrelas?.** Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, [s.n.], (2000).
- [9] Camenzind M., **Compact Objects in Astrophysics. White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes..** Center for Astronomy Heidelberg (ZAH), Springer-Verlag: Berlin, Germany (2007).
- [10] Duncan R. C., **‘Magnetars’, soft gamma repeaters & very strong magnetic fields.**  
<http://solomon.as.utexas.edu/magnetar.html> (em 30/05/2003).
- [11] Goldstein H., Poole C., Safko J., **Classical Mechanics.** 3<sup>o</sup> edição. Columbia University . Addison-Wesley: New-York, USA (2000).

- [12] Glendenning N. K., **Compact Stars**. 1<sup>o</sup> edição. University of California. Springer-Verlag: New-York, USA (2000).
- [13] J. Boguta, A. R. Bodmer, Nucl. Phys. A 292 413 (1977).
- [14] N. K. Glendenning, Phys. Lett. B 114 392 (1982).
- [15] N. K. Glendenning, Ap J 293 (1985) 470.
- [16] Fattoyev F. J., Horowitz C. J., Piekarewicz J., and Shen G., Phys. Rev. C 82, 055803 (2010).
- [17] Horowitz C.J., Piekarewicz J., Phys. Rev. Lett. 86, 25 (2001)
- [18] N. K. Glendenning and S. A. Moszkowski, Phys. Rev. Lett. 67, 02414 (1991).
- [19] G. A. Lalazissis, J. Konig, and P. Ring, Phys. Rev. C 55, 540 (1997).
- [20] Fattoyev F.J. and Piekarewicz J., Phys. Rev. C 82, 025805 (2010)
- [21] B. G. Todd-Rutel and J. Piekarewicz, Phys. Rev. Lett. 95, 122501(2005)
- [22] Broderick A., Prakash M., and Lattimer J. M., Phys. Lett. B 531 167?174 (2002).
- [23] Rabhi A., Providência C., and Da Providência J., J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 37 075102 (2010).
- [24] Wei F. X., Mao G. J., Ko C. M., Kisslinger L S., Stoecker H. e Greiner W. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 32 47 (2006).
- [25] Wei, F.X., Mao, G.J., Ko, C.M., Kisslinger, L.S., Stoecker, H. and Greiner, W., J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 32, 47 (2006).
- [26] Broderick A., Prakash M., and Lattimer J. M., Astrophys. J. 537, 351 (2000).
- [27] Rabhi A., Providência C., and Da Providência J., J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 35 125201 (2008).
- [28] Jackson, J. D., **Classical Electrodynamics**. John Wiley & Sons, Inc, 2<sup>o</sup> edição, New-York, USA (1962).
- [29] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. **Gravitation**. W.H. Freeman & Co, (1973).

- [30] V. C. A. Ferraro, *Astrophys. J.* 119, 407 (1954).
- [31] S. Lander and D. Jones, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 424, 482 (2012).
- [32] Xu-Guang Huang et al., *Phys. Rev. D* 81, 045015 (2010).
- [33] A. M. S. Santos, D. P. Menezes, *Phys. Rev. C* 69, 045803 (2004).
- [34] J. A. Pons, S. Reddy, M. Prakash, J. M. Lattimer, J. A. Miralles, *Astrophys. J.* 513, 780 (1999).
- [35] J. A. Pons, A. W. Steiner, M. Prakash, J. M. Lattimer, *Phys. Rev. Lett.* 86, 23 (2001).
- [36] M. D. Alloy, D. P. Menezes, *Phys. Rev. C* 83, 035803 (2011).
- [37] Horowitz C. J., Piekarewicz J., *Phys. Rev. Lett* 86, 5647, astro-ph/0010227 (2001).
- [38] Mueller H., Serot B. D., *Nucl. Phys. A* 606, 508 (1996).
- [39] Ban S., Meng J., Satula W., Wyss R., *Phys. Lett. B* 633, 231-236 (2006).
- [40] James M. Lattimer and Madappa Prakash, *Phys. Rep.* 442, 109 (2007).
- [41] J.M. Lattimer, Y. Lim, *Astrophys. J.* 771 51 (2013).
- [42] Horowitz C.J., Piekarewicz J., *Phys. Rev. C* 64, 062802 (2001).
- [43] R. Cavagnoli, D. P. Menezes, C. Providência, *Phys. Rev. C* 84, 065810 (2011).
- [44] Chang Xu, Bao-An Li, Lie-Wen Chen, *Phys. Rev. C* 82, 054607 (2010).
- [45] L. Landau, *Physik. Zeits. Sowjetunion* 1, 285 (1932)
- [46] Oppenheimer J. R. and Volkoff G. M. *Phys. Rev.* 55, 374 (1939).
- [47] Tolman R., *Phys. Rev.* 55, 364 (1939).
- [48] Callen, H. B. **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**. 2<sup>o</sup> edição. University of Pennsylvania, John Wiley & Sons, Inc: New-York, USA (1985).
- [49] Rhoades C. E., Ruffini R. *Phys. Rev. Letters* 32, 324 (1974).

- [50] Silbar R. R. and Reddy S. Am. J. Phys., Vol. 72, No. 7, July (2004).
- [51] Bandyopadhyay D., Chakrabarty S, Pal S. Phys. Rev. Lett. 79, 2176-2179 (1997)
- [52] F. Ozel, T. Guver, and D. Psaltis, Astrophys. J. 693, 1775 (2009)
- [53] F. Ozel, G. Baym, and T. Guver, Phys. Rev. D 82, 101301 (2010).
- [54] A. W. Steiner, J. M. Lattimer, and E. F. Brown, Astrophys. J. 722, 33 (2010).
- [55] S. Typel, B. A. Brown, Phys. Rev. C 64, 027302 (2001).
- [56] J. M. Lattimer, M. Prakash, Science 304, 536 (2004).
- [57] W. G. Newton, B. A. Li, Phys. Rev. C 80, 065809 (2009).
- [58] M. Burgay et al. Nature 426, 531-533 (2003).
- [59] M. Kramer et al. The 22nd Texas Symposium on Relativistic Astrophysics, Stanford University, December 2004 (astro-ph/0503386) (2005).
- [60] Ph. Podsiadlowski, J. D. M. Dewi, P. Lesaffre, J. C. Miller, W. G. Newton and J. R. Stone. Mon. Not. R. Astron. Soc. 361, 1243 (2005).
- [61] P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom, M. S. E. Roberts and J. W. T. Hessels, Nature, 467, 1081 (2010).
- [62] J. Antoniadis *et al*, Science, Vol. 340, no. 6131, 1233232 (2013).
- [63] J. Cottam, F. Paerels, M. Mendez, Nature 420, 51 (2002)
- [64] D. Sanwal et al., Astrophys. J. Lett. 574, 61 (2002)
- [65] Griffiths, D. **Introduction to Elementary Particles**. 1<sup>o</sup> edição. Reed College. John Wiley & Sons, Inc: New-York, USA (1987).
- [66] Kush P., Foley H. M. Phys. Rev. 72, 1256 (1947).
- [67] Schwinger J. Phys. Rev. 73, 416 (1947).
- [68] Kush P., Foley H. M. Phys. Rev. 74, 250 (1947).
- [69] Bjorken J. D., Drell S. D. **Relativistic Quantum Fields**. Mcgraw-Hill: New-York, USA (1965).



- [70] Greiner, W. **Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations**. 3<sup>o</sup> edição. Institut fur Theoretische Physik der Johann Wolfgang Goethe - Universitat Frankfurt. Springer - Verlag. Berlin, Germany (2000).
- [71] Bjorken J. D. , Drell S. D. **Relativistic Quantum Mechanics**. McGraw-Hill: New-York, USA (1964).
- [72] Walecka, J. D. **Theoretical nuclear and subnuclear physics**. 2<sup>o</sup> edição. Imperial College. Press and World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. London, England (2004).
- [73] Greiner, W. **Quantum Mechanics: An Introduction**. 4<sup>o</sup> edição. Institut fur Theoretische Physik der Johann Wolfgang Goethe - Universitat Frankfurt. Springer - Verlag. Berlin, Germany (2000).
- [74] Khalilov V.R., Phys. Rev. D 65, 056001 (2002).
- [75] Arfken, G. B., Weber, H. J. **Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física**. 2<sup>o</sup> edição. University of California. Campus/Elsevier: Rio de Janeiro, Brasil (2002).
- [76] Landau, L.D., Lifshitz, E.M. **Fluid Mechanics**. 2<sup>o</sup> edition. Pergamon Press, Oxford, England (1959).

# Compact stellar objects under the influence of strong magnetic fields

R. H. Casali and D. P. Menezes

*Departamento de Física - CFM - Universidade Federal de Santa Catarina  
Florianópolis - SC - Caixa Postal 476 - CEP 88.040-900 - Brazil*

**Abstract.** In the present work we study the properties of compact objects under the influence of strong magnetic fields. We consider a gas of nucleons, electrons and muons with beta equilibrium under the influence of different values of magnetic fields, with and without anomalous magnetic moment. Equations of state and mass-radius relations are calculated for different values of the magnetic fields.

**Keywords:** Compact objects, neutron stars, strong magnetic fields, magnetars.

**PACS:** 97.60.Jd 26.60.-c 26.60.Dd 26.60.Kp

## INTRODUCTION

The study of compact objects under the influence of strong magnetic fields ( $B > 10^{14}$  G) has become important after recent observations and theoretical studies [1, 2, 3]. In this work we consider the behavior of a gas nucleons in  $\beta$ -equilibrium with electrons and muons with and without anomalous magnetic moment under the influence of a magnetic field. Using the appropriate equations of state (EoS) and solving the Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equations [4, 5] for different values of the magnetic field, we obtained the mass-radius relations.

## FORMALISM

The Lagrangian densities for the baryons ( $b = n, p$ ) and leptons ( $l = e, \mu$ ) are given by:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_b &= \bar{\psi}_b(i\gamma_\mu\partial^\mu - q_b\gamma_\mu A^\mu - m_b - \frac{1}{2}\mu_N k_b \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu})\psi_b \\ \mathcal{L}_l &= \bar{\psi}_l(i\gamma_\mu\partial^\mu - q_l\gamma_\mu A^\mu - m_l)\psi_l,\end{aligned}\quad (1)$$

where  $\psi_i$ ,  $q_i$  and  $m_i$  for  $i = b, l$  are respectively the Dirac fields, charges and masses of baryons and leptons. The conditions of charge neutrality and beta equilibrium used are:

$$\mu_n - \mu_p = \mu_e = \mu_\mu \quad \text{and} \quad \rho_p = \rho_e + \rho_\mu. \quad (2)$$

Where  $\mu_i$ , for  $i = n, p, e, \mu$  is the chemical potential for neutrons, protons, electrons and muons, respectively. The energy spectrum for neutrons, protons and leptons respectively

are given by [6]:

$$E_s^n = \sqrt{k_z^2 + \left( \sqrt{m_n^2 + k_x^2 + k_y^2} - s\mu_N k_n B \right)^2}, \quad (3)$$

$$E_{v,s}^p = \sqrt{k_z^2 + \left( \sqrt{m_p^2 + 2\nu q_p B} - s\mu_N k_p B \right)^2}, \quad (4)$$

$$E_{v,s}^l = \sqrt{k_z^2 + m_l^2 + 2\nu |q_l| B}, \quad (5)$$

with  $\nu = n + \frac{1}{2} - \text{sign}(q)\frac{s}{2} = 0, 1, 2, \dots$ , being the Landau levels of the fermions with charge  $q$ ,  $s$  is the spin,  $\mu_N$  is the nuclear magneton,  $k_n$  and  $k_p$  are the neutron and proton anomalous magnetic moment (AMM) respectively, defined below. The densities of neutrons, protons and leptons are respectively:

$$\rho_n = \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \left[ \frac{1}{3} (k_{F,s}^n)^3 - \frac{1}{2} s \mu_N k_n B \left( \tilde{m}_n k_{F,s}^n + E_F^n \left( \arcsin \left( \frac{\tilde{m}_n}{E_{F,s}^n} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right], \quad (6)$$

$$\rho_p = \frac{q_p B}{2\pi^2} \sum_{v=0}^{v_{\max}} \sum_s k_{F,v,s}^p, \quad \text{and} \quad \rho_l = \frac{|q_l| B}{2\pi^2} \sum_{v=0}^{v_{\max}} \sum_s k_{F,v,s}^l.$$

Where the Fermi momenta for neutrons, protons and leptons are related to their Fermi energies by:

$$k_{F,s}^n = \sqrt{E_F^n^2 - \tilde{m}_n^2}, \quad \text{with, } \tilde{m}_n = m_n - s\mu_N k_n B, \quad (7)$$

$$k_{F,v,s}^p = \sqrt{E_F^p^2 - \left[ \sqrt{m_p^2 + 2\nu q_p B} - s\mu_N k_p B \right]^2}, \quad (8)$$

$$k_{F,v,s}^l = \sqrt{E_F^l^2 - (m_l^2 + 2\nu |q_l| B)}. \quad (9)$$

The energy densities for the neutrons, protons and leptons are:

$$\epsilon_n = \frac{1}{4\pi^2} \sum_s \left[ \frac{1}{2} k_{F,s}^n E_F^n^3 - \frac{2}{3} s \mu_N k_n B E_F^n^3 \left( \arcsin \left( \frac{\tilde{m}_n}{E_{F,s}^n} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right. \quad (10)$$

$$\left. - \left( \frac{1}{3} s \mu_N k_n B + \frac{1}{4} \tilde{m}_n \right) \left( \tilde{m}_n k_{F,s}^n E_F^n + \tilde{m}_n^3 \ln \left| \frac{k_{F,s}^n + E_F^n}{\tilde{m}_n} \right| \right) \right],$$

$$\epsilon_p = \frac{q_p B}{4\pi^2} \sum_{v=0}^{v_{\max}} \sum_s \left[ k_{F,v,s}^p E_F^p + \left( \sqrt{m_p^2 + 2\nu q_p B} - s\mu_N k_p B \right)^2 \right. \quad (11)$$

$$\left. \times \ln \left| \frac{k_{F,v,s}^p + E_F^p}{\sqrt{m_p^2 + 2\nu q_p B} - s\mu_N k_p B} \right| \right],$$

$$\epsilon_l = \frac{|q_l| B}{4\pi^2} \sum_{v=0}^{v_{\max}} \sum_s \left[ k_{F,v,s}^l E_F^l + (m_l^2 + 2\nu |q_l| B) \ln \left| \frac{k_{F,v,s}^l + E_F^l}{\sqrt{m_l^2 + 2\nu |q_l| B}} \right| \right]. \quad (12)$$

The total energy density and the pressure of the system can be written as:

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i; \quad P = \sum_i \mu_i \rho_i - \varepsilon; \quad \text{with, } i = n, p, e, \mu. \quad (13)$$

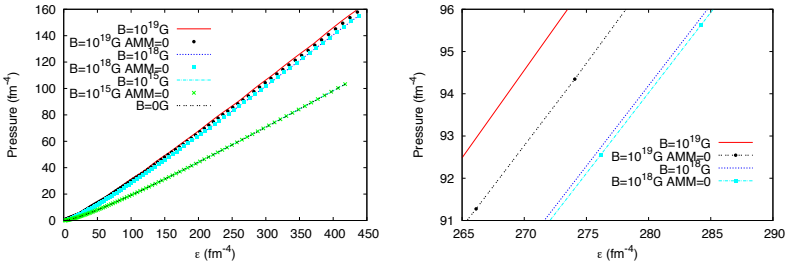
The anomalous magnetic moments for protons and neutrons are respectively:

$$k_p = \mu_N \left( \frac{g_p}{2} - 1 \right); \quad k_n = \mu_N \frac{g_n}{2}, \quad (14)$$

where  $g_p = 5.58$  and  $g_n = -3.82$  are the Landé  $g$ -factors.

## RESULTS

In this section we present the results of our work. On the left panel of figure 1 we show the equations of states for a Fermi gas with  $\beta$ -equilibrium, for different values of the magnetic field. We also consider the cases with and without anomalous magnetic moment. We found that the smaller the value of the magnetic field the smaller is the difference between the curves of the cases with and without anomalous magnetic moment. We also found that there are no differences between the curves with  $B = 10^{15}, 10^{16}$  G and the curve for the case with no magnetic field. This fact is true for both cases, with and without anomalous magnetic moment.

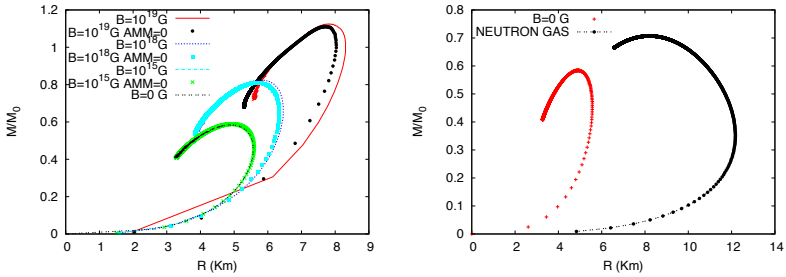


**FIGURE 1.** EoS for a Fermi gas with and without anomalous magnetic moment and  $\beta$ -equilibrium, for several values of magnetic field. (left panel). Zoom of the EoS for a Fermi gas with and without (AMM=0) anomalous magnetic moment and  $\beta$ -equilibrium, for several values of magnetic field (right panel).

The right panel of figure 1 shows a zoom in the graphic of the left panel from where we can clearly see the difference between the cases with and without anomalous magnetic moment for  $B = 10^{18}$  and  $10^{19}$  G.

On the left panel of the figure 2 we analyse radii and mass for the EoS discussed. For all the cases, as we increase the magnetic field, the maximum mass and the radii also increase. The curves of the described stars never reach mass values above  $1.2 M_{\odot}$  showing that the model used is too simple to describe exactly this system.

From the right panel of the figure 2 we notice that the neutron gas behaves as expected in the literature, reaching its maximum mass around  $0.7 M_{\odot}$ , with radius around  $8 \text{ Km}$ . The curve of the Fermi gas with  $\beta$ -equilibrium and no magnetic field shows a maximum



**FIGURE 2.** Results obtained with the TOV equations for a Fermi gas with and without (AMM=0) anomalous magnetic moment and  $\beta$ -equilibrium, for several values of magnetic field (*left panel*). Comparison for the mass-radius relation between a free Fermi gas and a neutron gas in  $\beta$ -equilibrium, both under no influence of the magnetic field (*right panel*).

mass around  $0.6 M_{\odot}$ , even smaller than the free neutron gas. Its radius, around  $5 \text{ Km}$ , is also smaller than the one for the neutron gas.

## CONCLUSIONS

We have concluded that the magnitude of the magnetic field only starts to interfere on the equation of state for values larger than  $B = 10^{18} \text{ G}$ . For these values of the magnetic field, the cases with and without anomalous magnetic moment give rise to different values for the mass and radii. Magnetic fields with values under  $B = 10^{18} \text{ G}$  do not influence the equations of state. So far we can also conclude that the model used to describe stars under the influence of strong magnetic fields is too simple and does not describe these stars perfectly. This work is still under progress, and we intend to improve our models.

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by CNPq and CAPES (Brazil).

## REFERENCES

1. A. Broderick, M. Prakash, and J.M. Lattimer, *Astrophys. J.* **537**, 351-367 (2000).
2. C. Kouveliotou, et al. *Nature* **393**, 235-237 (1998).
3. C. Kouveliotou; R. Duncan; C. Thompson. *Scientific American*, **288** 35-41 (2003).
4. R.C. Tolman, *Phys. Rev.* **55**, 364-372 (1939).
5. J.R. Oppenheimer, and G.M. Volkoff, *Phys. Rev.* **55**, 374-381 (1939).
6. A. Rabhi, C. Providência, and J. Da provedência, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **35**, 125201 (2008).

## The Symmetry energy of nuclear matter under a strong magnetic field

This article has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text article.

2012 J. Phys.: Conf. Ser. 342 012002

(<http://iopscience.iop.org/1742-6596/342/1/012002>)

View [the table of contents for this issue](#), or go to the [journal homepage](#) for more

Download details:

IP Address: 189.101.214.223

The article was downloaded on 21/02/2012 at 19:14

Please note that [terms and conditions apply](#).

# The Symmetry energy of nuclear matter under a strong magnetic field

R. Casali<sup>1a</sup>, C. Providência<sup>2b</sup>, D. Menezes<sup>1c</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Física (CFM), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (SC) caixa postal 476, CEP 88.040-900, Brazil

<sup>2</sup> Centro de Física Computacional, University of Coimbra, 3004-516, Coimbra, Portugal

E-mail: <sup>a</sup>rcasali@fisica.ufsc.br, <sup>b</sup>cp@teor.fis.uc.pt, <sup>c</sup>debora@fsc.ufsc.br

**Abstract.** In this work we study the effects caused by strong magnetic fields on the symmetry energy and its slope. We compare two models under three intensities of magnetic field, we investigate the behaviour for the conditions with and without anomalous magnetic moment. It is discussed the possible effects on the structure of the pasta phase.

## 1. Introduction

Asymmetric nuclear matter [1] is an important issue for both theoretical and experimental studies, specially for those interested in the description of stellar matter of compact stars. With the advent of new radioactive beams which will be operating in the near future, this area appears promising.

The symmetry energy is a quantity related to the neutron-proton asymmetry in the equation of state of nuclear matter, it is an important subject both for nuclear physics and astrophysics and is extremely important to the understanding of neutron star structure and composition [2]. In particular, the symmetry energy slope defines nuclear matter properties, such as, neutron skin, neutron dripline, binding energy and core-crust transition density [3]. We want to study the effect of the magnetic field on the symmetry energy.

We consider a system formed by protons and neutrons, interacting via the exchange of  $\sigma$ - $\omega$ - $\rho$  mesons, in the presence of a uniform magnetic field  $B$  along the z-axis. Three possible values of magnetic fields,  $B = 0, 10^{17}$  and  $10^{18}G$  are taken. We will also study the effect of the anomalous magnetic moment for protons and neutrons. The NL3 and FSU parameterizations are used to describe the equations of state in the relativistic nuclear mean field formalism. These models present very different density dependence of the symmetry energy. At saturation, the slope  $L$  is, respectively, 118 and 60 MeV.

## 2. Formalism

The Lagrangian used is given by:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}_b [i\gamma_\mu \partial^\mu + q_b \gamma_\mu A^\mu - g_\rho \tau_{3b} \gamma_\mu \vec{\rho}^\mu - m_b^* - g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu - k_b \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \psi_b \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) + \frac{1}{3} b m_n (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1)$$

$$+\frac{1}{2}m_\rho^2\vec{\rho}_\mu\cdot\vec{\rho}_\mu-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{4}P^{\mu\nu}P_{\mu\nu}+\frac{1}{4!}\xi g_\omega^4(\omega_\mu\omega^\mu)^2+\Lambda_\omega(g_\rho^2\vec{\rho}_\mu\cdot\vec{\rho}^\mu)(g_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu).$$

The Lagrangian presents an isodoublet nucleon field ( $\psi$ ) interacting via the exchange of the scalar meson ( $\sigma$ ), the vector meson ( $\omega^\mu$ ), the isovector meson ( $\rho^\mu$ ) and the photon ( $A^\mu$ ), where  $m_b^* = (m_b - g_\sigma\sigma)$ ,  $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu$ ,  $P_{\mu\nu} = \partial_\mu\rho_\nu - \partial_\nu\rho_\mu$  and  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . The nucleon anomalous magnetic moments are introduced via the coupling of the baryons to the electromagnetic field tensor  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$  and strength  $k_p = 1.79285$  for the proton and  $k_n = -1.91315$  for the neutron [4, 5]. The parameters  $\xi$ , used to describe the omega-meson self-interactions, and  $\Lambda_\omega$ , that modifies the density-dependence of the symmetry energy, are included so we can compare the two models employed [6, 7].

Using the Lagrangian (1) and the mean-field approximation, the meson field expressions follow from the Euler-Lagrange equations:

$$\begin{aligned} m_\sigma^2\sigma_0 &= -cg_\sigma^4\sigma_0^3 - bm_n g_\sigma^3\sigma_0^2 + g_\sigma n^s \\ m_\omega^{*2}\omega_0 &= -\frac{\xi}{6}g_\omega^4\omega_0^3 + g_\omega n_b \\ m_\rho^{*2}\rho_{03} &= \tau_{3b}g_\rho n_3, \end{aligned} \quad (2)$$

with  $m_\rho^{*2} = m_\rho^2 + 2\Lambda_\omega g_\rho^2 g_\omega^2 \omega_0^2$ ,  $m_\omega^{*2} = m_\omega^2 + 2\Lambda_\omega g_\rho^2 g_\omega^2 \rho_{03}^2$ ,  $n^s = n_p^s + n_n^s$ ,  $n_b = n_p + n_n$  and  $n_3 = n_p - n_n$ . Where:

$$\begin{aligned} n_p^s &= \frac{q_p B m_p^*}{2\pi^2} \sum_\nu \sum_s^{\nu_{max}} \frac{\sqrt{m_p^{*2} + 2\nu q_p B} - s\mu_N k_p B}{\sqrt{m_p^{*2} + 2\nu q_p B}} \ln \left| \frac{p_{F,\nu,s}^p + E_F^p}{\sqrt{m_p^{*2} + 2\nu q_p B} - s\mu_N k_p B} \right| \\ n_p^s &= \frac{m_n^*}{4\pi^2} \sum_s \left[ E_{F,s}^n p_{F,s}^n - \bar{m}_n^2 \ln \left| \frac{p_{F,s}^n + E_F^n}{\bar{m}_n} \right| \right] \\ n_p &= \frac{q_p B}{2\pi^2} \sum_\nu \sum_s^{\nu_{max}} p_{F,\nu,s}^p \\ n_n &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \left[ \frac{1}{3}(p_{F,s}^n)^3 - \frac{1}{2}s\mu_N k_n B \left( \bar{m}_n p_{F,s}^n + E_F^{n2} \left( \arcsin \left( \frac{\bar{m}_n}{E_F^n} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

**Table 1.** Parameter sets for the two models discussed in the text. The meson masses  $m_\sigma$ ,  $m_\omega$  and  $m_\rho$  are given in  $MeV$ . The nucleon mass is  $939 MeV$  in both models.

Model	$m_\sigma$	$m_\omega$	$m_\rho$	$g_\sigma$	$g_\omega$	$g_\rho$	c	b	$\xi$	$\Lambda_\omega$
NL3	508.194	782.501	763.000	10.217	12.868	8.948	-0.002651	0.002055	0.00	0.00
FSU	491.5	782.5	763.0	10.592	14.302	11.767	0.0396	0.000756	0.06	0.03

The energy spectra for protons and neutrons are given by [8]:

$$\begin{aligned} E_{\nu,s}^p &= \sqrt{p_z^2 + (\sqrt{m_p^* + 2\nu q_p B} - s\mu_N k_p B)^2} + g_\omega\omega^0 + \frac{1}{2}g_\rho\rho^0 \\ E_s^n &= \sqrt{p_z^2 + (\sqrt{m_n^* + p_\perp^2} - s\mu_N k_p B)^2} + g_\omega\omega^0 - \frac{1}{2}g_\rho\rho^0, \end{aligned} \quad (4)$$



where  $\nu = n + \frac{1}{2} - \text{sgn}(q_b) \frac{s}{2} = 0, 1, 2, \dots$  are the Landau levels for the fermions with electric charge  $q$ ,  $s$  is the quantum number of spin  $e$  assume values  $+1$  for spin up  $e$   $-1$  for spin down cases.

Defining  $\bar{m}_n = m^* - s\mu_N k_p B$ , the Fermi momenta  $p_{F,\nu,s}^p$  of the protons and  $p_{F,\nu,s}^n$  of the neutrons and their relationship with the Fermi energies of protons  $E_F^p$  and neutrons  $E_F^n$  can be written as:

$$p_{F,\nu,s}^p = E_F^{p2} - [\sqrt{m_p^{*2} + 2\nu q_p B} - s\mu_N k_p B]^2, \quad p_{F,\nu,s}^n = E_F^n - \bar{m}_n^2. \quad (5)$$

The summation over the Landau level  $\nu$  is made until  $\nu_{max}$ , which is the largest value of  $\nu$  for which the square of Fermi momenta of the particle is still positive and corresponds to the closest integer, from below to:

$$\nu_{max} = \left\lfloor \frac{(E_F^p + s\mu_N k_p B)^2 - m_p^{*2}}{2|q_p|B} \right\rfloor \quad (6)$$

The chemical potentials of protons and neutrons are:

$$\mu_p = E_F^p + g_\omega \omega^0 + \frac{1}{2} g_\rho \rho^0, \quad \mu_n = E_F^n + g_\omega \omega^0 - \frac{1}{2} g_\rho \rho^0. \quad (7)$$

The total energy density of the neutron star matter is given by:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t = & \sum_{b=p,n} \varepsilon_b + \frac{1}{2} m_\sigma \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho \rho_0^2 \\ & + \frac{1}{8} \xi (g_\omega \omega_0)^4 + \frac{1}{3} b m_n (g_\sigma \sigma_0)^3 + \frac{1}{4!} c (g_\sigma \sigma_0)^4 + 3 \Lambda_\omega (g_\omega \omega_0)^2 (g_\rho \rho_0)^2, \end{aligned} \quad (8)$$

where the expressions for the proton and neutron energy density are, respectively,

$$\begin{aligned} \varepsilon_p = & \sum_{n=0}^{\nu_{max}} \sum_s \frac{|Q_p|B}{4\pi^2} \left[ p_{F,n,s}^p E_F^p + (\sqrt{m_p^2 + 2Q_p B n} - s\mu_N k_p B)^2 \right. \\ & \left. \times \ln \left| \frac{p_{F,n,s}^p + E_F^p}{(\sqrt{m_p^2 + 2Q_p B n} - s\mu_N k_p B)} \right| \right], \\ \varepsilon_n = & \frac{1}{4\pi^2} \sum_s \frac{1}{2} E_F^{n3} p_{F,n,s}^n - \frac{2}{3} s\mu_N k_n B E_F^{n3} \left( \arcsin \frac{\bar{m}}{E_F^n} - \frac{\pi}{2} \right) \\ & - \left( \frac{1}{3} s\mu_N k_n B + \frac{1}{4} \bar{m} \right) \left[ \bar{m} p_{F,n,s}^n E_F^n + \bar{m}^3 \ln \left( \left| \frac{E_F^n + p_{F,n,s}^n}{\bar{m}} \right| \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

and the pressure for the baryons is  $P_b = n_b \mu_b - \varepsilon_b$  ( $b=p,n$ ).

The symmetry energy and its density slope are, respectively, defined as:

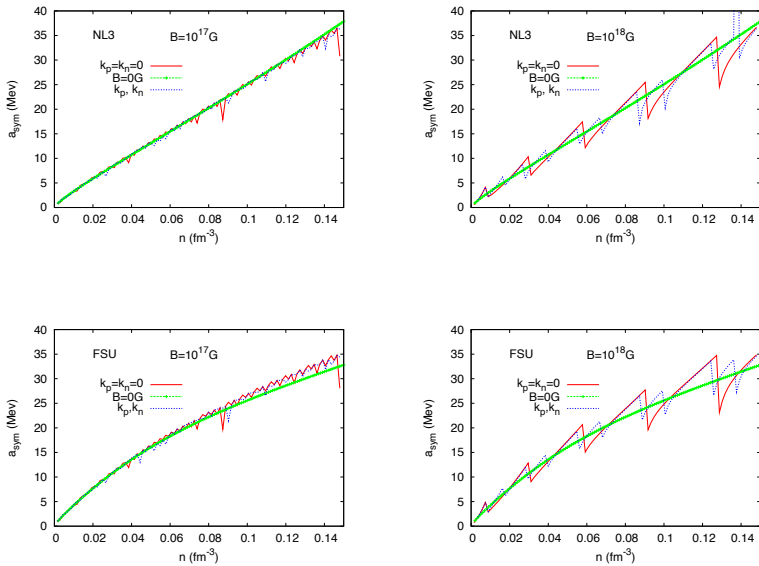
$$a_{sym} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E/A}{\partial t^2}, \quad L = 3n_0 \frac{\partial a_{sym}}{\partial n}, \quad (10)$$

where  $n_0 = 0.153 \text{ fm}^{-3}$  is the saturation density of nuclear matter and  $t = \frac{n_n - n_p}{n_p + n_n}$  is the asymmetry parameter.

### 3. Results and discussions

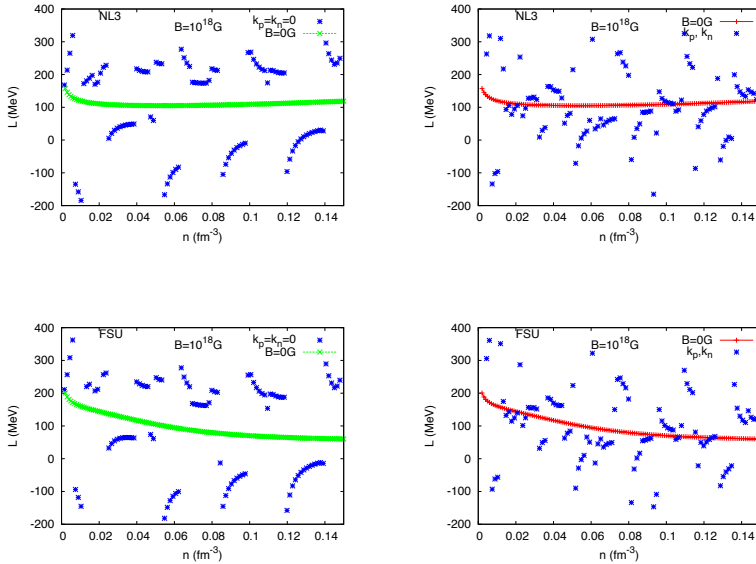
In figure (1) we show how the behaviour of the symmetry energy, given in (10), varies with the baryonic density when different intensities of magnetic fields are applied.  $B = 0$  G is used as a field of reference.

On the left side, the upper and lower panels represent the NL3 and FSU models for  $B = 10^{17}$  G. The effect of Landau levels is seen, but due to the relatively low magnetic field, the curve of the symmetry energy is very similar to that of the  $B = 0$  G field. The irregularities are due to the filling of Landau levels, which have small energy differences between them for fields of this intensities.



**Figure 1.** Symmetry energy versus baryonic density for NL3 and FSU models, with and without anomalous magnetic moment. The left panels presents  $B = 0$  and  $10^{17}$  G and the right panels presents  $B = 0$  and  $10^{18}$  G values for the magnetic field.

On the right side the curves for  $B = 10^{18}$  G field are shown. As seen from equation (6) a smaller number of Landau levels is filled, due to the higher value of magnetic field. The jumps obtained are larger than those arising with  $B = 10^{17}$  G. This behaviour will affect the chemical composition of stellar matter. In particular, we get regions where the symmetry energy becomes larger implying larger proton fractions in  $\beta$ -equilibrium matter. The opposite occurs in neighbouring regions. The magnitude  $B = 10^{18}$  G may be larger than expected at the inner crust of a compact star, but it would be interesting to investigate the effect of  $B$  on the pasta phase. Since the effects depend on the filling of the Landau levels and, therefore, on the density, the different pasta phase geometries may be affected in different ways.



**Figure 2.** Density slope versus baryonic density for NL3 and FSU models, for magnetic fields of magnitude  $B = 0, 10^{18} \text{ G}$ . In the left upper and lower panels, anomalous magnetic moment are not considered. In the right they are included.

Comparing results for FSU and NL3 there are different trends due to different behavior of the symmetry energy with density in both models. For NL3, the symmetry energy for  $B = 10^{17} \text{ G}$  has a more linear dependence on the density which follows the  $B = 0 \text{ G}$  line tendency. This also happens for the  $B = 10^{18} \text{ G}$  scenario, but because of the smaller number of Landau levels the symmetry energy curve presents larger oscillations around the  $B = 0 \text{ G}$  line. The FSU model shows a similar behavior, both for the  $B = 10^{17} \text{ G}$  and  $B = 10^{18} \text{ G}$  curves, but the first one demonstrate a small discrepancy around the saturation density.

The inclusion of the anomalous magnetic moment has almost no effect for  $B = 10^{17} \text{ G}$ . However, for a larger field such as  $B = 10^{18} \text{ G}$  a clear effect is observed due to the spin polarization of neutrons and protons, on top of the Landau level quantization effect on protons. The main result is an increase of the number and a decrease of the magnitude of the discontinuities around the average  $B = 0$  result.

The slope of the symmetry energy is defining how strong is the distillation effect and the magnitude of the neutron drip in the inner crust pasta phase. Figure (1) has shown that the slope of the symmetry energy is also affected by the magnetic field and, therefore, we will next calculate and discuss this quantity.

In figure (2) the slope of the symmetry energy, eq. (10), is presented for both models, without (left panel) and with (right panel) the inclusion of the anomalous magnetic moment. We again

use the  $B = 0$   $G$  as reference. As expected, the Landau levels generated by the magnetic fields have a strong effect on the slope, with regions where it is clearly larger, followed by regions where it is smaller, becoming even negative. In the regions where the slope of the symmetry energy becomes larger the isospin distillation effect will be stronger, and as a result, more isospin symmetric paste clusters are obtained. A second effect will be a denser neutron background gas. The opposite will occur in the neighbouring regions with a smaller slope  $L$ . These results show that the properties of the clusters will be affected by the magnetic field, and, as a result all transport properties that depend on the structure of this phase.

The inclusion of the anomalous magnetic moment will bring extra complexity to the problem with a less systematic behaviour due to the spin polarization effects.

#### 4. Summary

In the present work, we have studied the behavior of the symmetry energy and its slope. In particular, we have compared these quantities obtained for two different models, NL3 and FSU, for three values of magnetic field,  $B = 0$ ,  $10^{17}$ ,  $10^{18}$   $G$  and under two different conditions, with and without the inclusion of the anomalous magnetic moment.

It was shown that the appearance of Landau levels due to the magnetic field will affect the symmetry energy, giving rise to discontinuities: the symmetry energy may become larger or smaller than the  $B = 0$  reference for given densities which are determined with the filling of Landau levels or spin levels. It is expected that the observed behaviour will affect the structure of the inner crust of a neutron star, namely the pasta phase. Not only the fraction of protons in  $\beta$ -equilibrium matter will change but also the properties of the clusters and the background neutron gas. The effects are larger the more intense the magnetic field. The inclusion of the anomalous magnetic moment will only be noticed for quite high fields and will make the behaviour even more complex.

#### 5. Acknowledgments

This work was supported by CAPES/FCT 232/09.

#### References

- [1] Ban S., Meng J., Satula W., Wyss R., Phys. Lett. B 633, 231-236 (2006).
- [2] Horowitz C.J., Piekarewicz J., Phys. Rev. C 64, 062802 (2001)
- [3] Chang Xu, Bao-An Li, Lie-Wen Chen, Phys. Rev. C 82, 054607 (2010)
- [4] Rabhi A., Providência C., and Da Providência J., J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 37 075102 (2010).
- [5] Broderick A., Prakash M., Lattimer M., ApJ 537, 351-367 (2000).
- [6] Fattoyev F. J., Horowitz C. J., Piekarewicz J., and Shen G., Phys. Rev. C 82, 055803 (2010).
- [7] Horowitz C.J., Piekarewicz J., Phys. Rev. Lett. 86, 25 (2001)
- [8] Rabhi A., Providência C., and Da Providência J., J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 35 125201 (2008).

# Density dependent magnetic field and the equation of state of hyperonic matter

*Rudiney Hoffmann Casali, Débora Peres Menezes*  
 Departamento de Física  
 Universidade Federal de Santa Catarina  
 88040-900 Campus Universitário  
 Florianópolis, SC  
 Brazil  
 Email: [rcasali@fisica.ufsc.br](mailto:rcasali@fisica.ufsc.br)

## 1 Introduction

We are interested on the effects, caused by strong variable density dependent magnetic fields, on hyperonic matter, its symmetry energy [1], equations of state and mass-radius relations. The inclusion of the anomalous magnetic moment [2] of the particles involved in a stellar system is performed, and some results are compared with the cases that do not take this correction under consideration. The Lagrangian density used follows the nonlinear Walecka model plus the leptons subjected to an external magnetic field as in [3]. We define total energy density, total pressure, symmetry energy and the magnetic field applied, whose curves can be seen in Figure 1, as it follows, where  $n_p$ ,  $n_n$  and  $n$  are the proton, neutron and baryonic densities,  $n_0 = 0.153 \text{ fm}^{-3}$  is the saturation density. The model used is the GM1 [4],  $B_{surf}$  is the magnetic field at the surface, taken equal to  $10^{15} \text{ G}$ ,  $B_0$  is the magnetic field for large values of densities. The remaining parameters represent two conditions of magnetic field decay, a fast one with  $\gamma = 4.00$  and  $\beta = 0.006$ , and a slow one with  $\gamma = 1.00$  and  $\beta = 0.550$ . The unit of the magnetic field is the critical field  $B_e^c = 4.414 \times 10^{13} \text{ G}$ , so that  $B = B_0/B_e^c$ .

$$\varepsilon_T = \varepsilon_m + \frac{\left[B\left(\frac{n}{n_0}\right)\right]^2}{2}; P_T = P_m + \frac{\left[B\left(\frac{n}{n_0}\right)\right]^2}{2}, \quad (1)$$

$$a_{sym} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon / n}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=0}; t = \frac{n_n - n_p}{n_p + n_n}, \quad (2)$$

$$B\left(\frac{n}{n_0}\right) = B_{surf} + B_0 \left\{ 1 - \exp \left[ -\beta \left( \frac{n}{n_0} \right)^\gamma \right] \right\}. \quad (3)$$

In this work we study the behavior of baryonic matter under two types of magnetic field influence: in one of them we consider a fixed magnetic field  $B_0$  in the equations

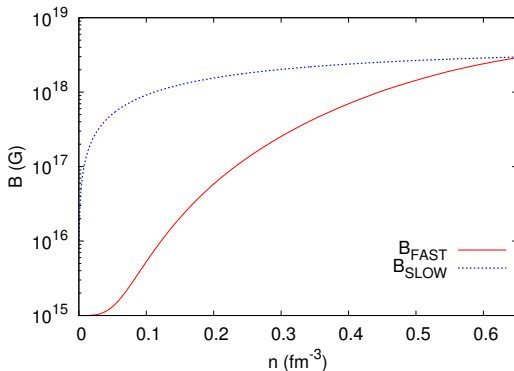


Figure 1: Density dependent magnetic field decays, a fast one with  $\gamma = 4.00$  and  $\beta = 0.006$ , and a slow one with  $\gamma = 1.00$  and  $\beta = 0.550$ .

of state (FIX). In the other one, a variable density dependent magnetic field  $B\left(\frac{n}{n_0}\right)$  is considered on the equations of state (VAR). Both cases consider a squared density dependent magnetic field term  $\left[B\left(\frac{n}{n_0}\right)\right]^2$  term on the total energy density and total pressure equations. The first two graphics, Figure 2, show how the symmetry energy is affected by the magnetic field. On the left a fixed field  $B$ , on the right a density dependent one. As the magnetic field decays, on the right, it is possible to see the diminishing effects of the Landau level quantization, toward lower densities. Figure 3 presents the equation of state of a hyperonic matter. Both cases present smoothening tendencies, as the  $\left[B\left(\frac{n}{n_0}\right)\right]^2$  term decays, but due to the inclusion of the variable density dependent magnetic field also on the equations of state, in the right panel, this tendency is more strong. The effects of the anomalous magnetic moment corrections can be seen in the zoomed areas. At the end, in Figure 4, we plot the mass-radius relations, showing results not very different from those of current literature.

## 2 Conclusions

In this work we studied the effects of the inclusion of a density dependent magnetic field in the equations of state and we compared it with the one found in the literature. We notice that the variable density dependent magnetic field generates a much less bizarre energy symmetry curve, as the magnetic field decreases. We performed three

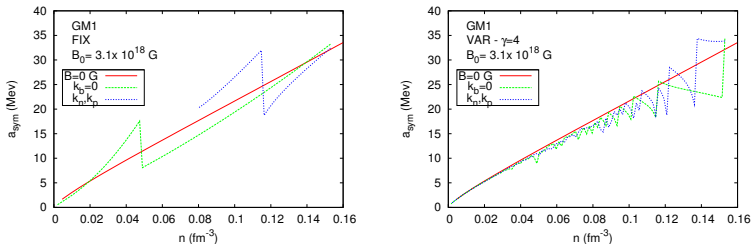


Figure 2: Symmetry energy for nucleonic matter. Two cases of anomalous magnetic moments are considered, for fixed (left panel) and variable density dependent (right panel) magnetic field.

scenarios for the inclusion of the anomalous magnetic moment corrections, calculated its equations of state and mass-radius relations. It can be seen in Table 1 that a variable density dependent magnetic field can be applied on the equations of state without causing great discrepancies from that found in literature.

Magnetic Field	AMM	$M_{Max}(M_0)$	R (Km)
$B = 0 \text{ G}$		1.97	12.55
$B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G} - \text{FIX}$	$\kappa_b = 0$	2.03	11.72
	$\kappa_{n,p}$	2.06	11.91
	$\kappa_{n,p,hyp}$	2.06	11.69
$B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G} - \text{VAR}$	$\kappa_b = 0$	2.10	12.94
	$\kappa_{n,p}$	2.10	12.94
	$\kappa_{n,p,hyp}$	2.12	12.94

Table 1: Mass-radius curves for hyperonic matter summarized. Curves with no corrections on the anomalous magnetic moment ( $k_b = 0$ ), with corrections on neutrons and protons ( $k_{n,p}$ ) and with corrections on neutrons, protons and hyperons ( $k_{n,p,hyp}$ ).

This work was supported by CAPES/CNPq/FAPESC and CAPES/FCT 232/09.

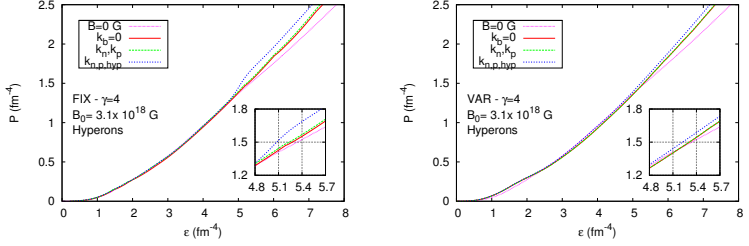


Figure 3: Equations of state for hyperonic matter. Three cases of anomalous magnetic moment inclusion are considered, for fixed (left panel) and variable density dependent (right panel) magnetic field.

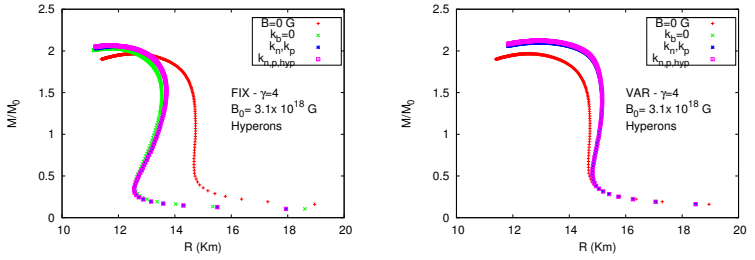


Figure 4: Mass-radius relation for hyperonic matter. Three cases of anomalous magnetic moments inclusion are considered, for fixed (left panel) and variable density dependent(right panel) magnetic field.



## References

- [1] T. Matsui. Nucl. Phys. A, **370**, 365 (1981).
- [2] A.E. Broderick, M. Prakash, J.M. Lattimer. Physics Letters B, **531**, 167-174 (2002).
- [3] A. Rabhi, C. Providência, J. Da Providência. J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.,**37**, 075102 (2010).
- [4] N.K. Glendenning, S.A. Moszkowski. Phys. Rev. Lett., **67**, 2414 (1991).

# Hadronic and hybrid stars subject to density dependent magnetic fields

R. Casali,<sup>\*</sup> L. B. Castro,<sup>†</sup> and D. P. Menezes<sup>‡</sup>

*Departamento de Física CFM, Universidade Federal de Santa Catarina,  
Florianópolis, SC CP. 476, CEP 88.040-900, Brazil*

## Abstract

In this work we present a study of magnetars composed of hadronic and quark matter, under the influence of strong magnetic fields. We present our results for hadronic matter taking into account the effects that the inclusion of anomalous magnetic moment corrections may cause on the equations of state (EOS). Particle abundances are also presented and discussed. Additionally, the case of hybrid stars under the influence of strong magnetic fields is considered. We study the structure of hybrid stars based on the Maxwell condition (without a mixed phase), where the hadron phase is described by the non-linear Walecka model (NLW) and the quark phase by the Nambu-Jona-Lasinio model (NJL). The EOS and the mass-radius relation for each case are calculated and discussed. We show that the recently observed high mass neutron stars can be described by both hadronic and hybrid equations of state subject to strong magnetic fields.

PACS numbers: 12.39.Ki, 14.20.Jn, 26.60.Kp

---

<sup>\*</sup>rcasali@fisica.ufsc.br

<sup>†</sup>luis.castro@pgfsc.ufsc.br

<sup>‡</sup>debora.p.m@fsc.ufsc.br

## I. INTRODUCTION

The study of neutron stars provides an excellent laboratory for the understanding of dense matter under extreme conditions. A typical neutron star has a mass of the order of  $1 - 2 M_{\odot}$  and a radius of the order of 10 Km, its temperature stands around  $10^{11}$  K right after its birth, followed by a rapid cooling process led by neutrino emission. Although the conventional models of neutron stars assume that dense matter is composed of hadrons and leptons, as the density increases inwards, the Fermi level of the nucleons increases to values above the mass threshold of heavier particles, opening the possibility that another particle is created, reducing the total energy. Baryon number conservation, violation of strangeness and the Pauli exclusion principle guarantee this mechanism. The same phenomenon is responsible for the reduction of the total pressure.

On the other hand, the Bodmer-Witten conjecture [1–3] states that quarks could be deconfined from the hadrons, forming a stable quark matter. This raises questions about the true constitution of ground state matter at high densities [4, 5] and arises the possibility that compact stars can be constituted of pure deconfined quark matter or perhaps be hybrid stars, containing in their core a pure quark phase or a non-homogeneous mixed quark-hadron phase, whose existence is a source of intense discussions in the literature [5–17]. Most neutron stars have masses of the order of  $1.44M_{\odot}$ , but more recently, at least two pulsars, PSR J1614-2230 [18] and PSR J0348+0432 [19] were confirmed to bear masses of the order of  $2M_{\odot}$ . If one believes that a unique equation of state (EOS) has to be able to account for all possible observational data, a hard EOS is then mandatory.

Neutron stars generally manifest themselves as pulsars, which are powered by their rotation energy or as accreting X-ray binaries, which are powered by the gravitational energy. Some compact objects, known as magnetars, do not fit into any of these categories. They are normally isolated neutron stars whose main power source is the magnetic field and two classes have been discovered: the soft gamma-repeaters that are x-ray transient sources and the anomalous x-ray pulsars, a class of persistent x-ray sources with no sign of a binary companion. Hence, magnetars are extremely magnetized neutron stars, with magnetic fields reaching  $B = 10^{15}$  G at the surface and central magnetic fields that could reach even higher values [20, 21]. At such high range of magnitudes magnetic fields can interfere on the thermodynamic and hydrodynamic properties [22–26], causing anisotropy. However, anisotropic

problems can be minimized if magnetic fields lower than  $B_0 = 3.2 \times 10^{18} \text{ G}$  (depending on the choice of units) are used [27], so we keep our values of magnetic field below this limit.

Another possible complication that the introduction of a magnetic field can bring is that it is a source of gravitational energy. The virial theorem sets an upper limit so that magnetic fields do not imply on a gravitational collapse of the magnetar. We apply a density dependent magnetic field [28] on our equations, and this ensures no gravitational setbacks.

If strong magnetic fields are considered, contributions from the anomalous magnetic moments of the nucleons and hyperons should also be taken into account. Experimental measurements find that  $k_p = \mu_N(g_p/2 - 1)$  for protons and  $k_n = \mu_N g_p/2$  for neutrons, where  $\mu_N$  is the nuclear magneton,  $g_p = 5.58$  and  $g_n = -3.83$  are the Landau g-factors of protons and neutrons, respectively.

The influence of strong magnetic fields on the quark-hadron phase transition was first discussed in [28], using a Dirac-Hartree-Fock approach within a mean-field approximation to describe both the hadronic and the quark phases. For the hadronic matter a system of protons, neutrons and electrons was considered, and for the quark phase the MIT bag model with one-gluon exchange was used. A very hard quark equation of state (EOS) was obtained so that the hybrid star did not have a quark core. The authors concluded that compact stars have a smaller maximum mass in the presence of strong magnetic fields, a result that does not agree with other more recent works where hadronic stars [29–32] or quark stars [33, 34] in the presence of strong magnetic fields have been studied.

In this work we first study magnetars composed of hadronic matter only. We consider the inclusion of the anomalous magnetic moments of all the particles in the baryonic octet and its effects on stellar properties. We describe the hadronic matter within the framework of the relativistic non-linear Walecka model (NLW) [35]. We also consider a magnetic field that increases, in a density dependent way, from the surface ( $10^{15} \text{ G}$ ) to the interior of the star. Comparing our work with [31] we show that significant differences on maximum masses and their respective radii for stronger magnetic fields can be obtained depending on the choice of the parameters for slow and fast decays of the density dependent magnetic field. This means that different combinations of parameters can generate controllable values for masses and radii. We also compare our results qualitatively with those found in [6, 30] in terms of the inclusion of the anomalous magnetic moments, and show that this correction stiffens the equations of state.

Additionally we study hybrid stars under the influence of magnetic fields. The structure of hybrid stars is based on the Maxwell condition (without mixed phase), the hadronic matter is again described by the NLW [35] and the quark matter by the Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model [36] composed of quarks up ( $u$ ), down ( $d$ ) and strange ( $s$ ) in  $\beta$ -equilibrium. We also assume the density-dependent magnetic field and we choose the same two sets of values for the parameters  $\beta$  and  $\gamma$  for slow and fast decays of the density dependent magnetic field as in the hadronic case. We show that hybrid stars have a larger maximum mass in the presence of strong magnetic field and we also show that the slow decays produce smaller maximum masses, but larger radii. Our result for the values of maximum masses and radii for a weak magnetic field are in agreement with the results obtained for  $B = 0$  G [37]. The macroscopic properties of hybrid stars under effects of magnetic fields have been already studied in the literature [38], where the quark phase is described by the MIT bag model. A qualitative analysis shows that the properties of the stars obtained in both cases are very similar, but a quantitative analysis shows that we obtain higher maximum masses and radii for weaker magnetic fields with the NJL model describing the quark core. Furthermore, using results of recent studies on the stability windows [32, 39], we show that the NJL model allows a more realistic description of the quark phase of a hybrid star, because the stability conditions for stable quark matter are satisfied with the parametrizations normally used in the literature.

The organization of this work follows: in Sec. II, we give a brief review of the formalism used to describe the hadronic (subsection A) and quark (subsection B) phases under a magnetic field. In subsection C, we discuss the conditions for the construction of a hybrid star with the Maxwell condition. In Sec. III we present our results for the inclusion of a density dependent magnetic field on the total energy density and total pressure, particle fractions and mass-radius relation for hadronic and hybrid stars. Finally, in Sec. IV we present our main conclusions.

## II. FORMALISM

In this section we present an overview of the equations used to describe the hadronic (subsection A), quark (subsection B) and hybrid (subsection C) phases. We describe hadronic matter within the framework of the relativistic non-linear Walecka model (NLW) [35]. The quark matter is described by SU(3) version of the the Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model.

Hybrid matter is built using the Maxwell conditions [40]. The symmetric nuclear matter properties at saturation density adopted in this work are given by the GM1 parametrization [41], with compressibility  $K = 300$  (MeV), binding energy  $B/A = -16.3$  (MeV), symmetry energy  $a_{\text{sym}} = 32.5$  (MeV), slope  $L = 94$  (MeV), saturation density  $\rho_0 = 0.153$  ( $\text{fm}^{-3}$ ) and nucleon mass  $m = 938$  (MeV).

### A. Hadronic phase under a magnetic field

By applying a field-theoretical approach we describe the equation of state (EOS) of hadronic matter. In this approximation the baryons interact by exchanging  $\sigma$ ,  $\omega$  and  $\rho$  mesons under the influence of a magnetic field  $B$  set along on the  $z$ -axis. The total lagrangian density reads:

$$\mathcal{L}_H = \sum_b \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_m + \sum_l \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_B. \quad (1)$$

where  $\mathcal{L}_b$ ,  $\mathcal{L}_m$ ,  $\mathcal{L}_l$  and  $\mathcal{L}_B$  are the baryons, mesons, leptons and electromagnetic field Lagrangians, respectively, and are given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_b = & \bar{\psi}_b (i\gamma_\mu \partial^\mu - q_b \gamma_\mu A^\mu - m_b + g_{\sigma b} \sigma \\ & - g_{\omega b} \gamma_\mu \omega^\mu - g_{\rho b} \tau_{3b} \gamma_\mu \rho^\mu - k_b \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \psi_b, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - U(\sigma) + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ & - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_l = \bar{\psi}_l (i\gamma_\mu \partial^\mu - q_l \gamma_\mu A^\mu - m_l) \psi_l, \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (5)$$

The  $b$ -sum runs over the baryonic octet  $b \equiv N$  ( $p$ ,  $n$ ),  $\Lambda$ ,  $\Sigma^{\pm,0}$ ,  $\Xi^{\pm,0}$ ,  $\psi_b$  is the corresponding baryon Dirac field, whose interactions are mediated by the  $\sigma$  scalar,  $\omega_\mu$  isoscalar-vector and  $\rho_\mu$  isovector-vector meson fields. The baryon mass and isospin projection are denoted by  $m_b$  and  $\tau_{3b}$ , respectively, and the masses of the mesons are  $m_\sigma = 512$  MeV,  $m_\omega = 783$  MeV and  $m_\rho = 770$  MeV. The strong interaction couplings of the nucleons with the meson fields are denoted by  $g_{\sigma N} = 8.910$ ,  $g_{\omega N} = 10.610$  and  $g_{\rho N} = 8.196$ . We consider that the couplings of the hyperons with the meson fields are fractions of those of the nucleons,

defining  $g_{iH} = X_{iH}g_{iN}$ , where the values of  $X_{iH}$  are chosen as  $X_{\sigma H} = 0.700$  and  $X_{\omega H} = X_{\rho H} = 0.783$  [5]. The term  $U(\sigma) = \frac{1}{3}bm_n(g_{\sigma N}\sigma)^3 - \frac{1}{4}c(g_{\sigma N}\sigma)^4$  denotes the scalar self-interactions [42–44], with  $c = -0.001070$  and  $b = 0.002947$ . We define the mesonic tensors  $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu$  and  $\mathbf{P}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{\rho}_\nu - \partial_\nu\vec{\rho}_\mu - g_{\rho b}(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu)$  and the electromagnetic field tensor  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . The anomalous magnetic moments (AMM) of the baryons is defined as  $\kappa_b = (\mu_b/\mu_N) - q_b(m_p/m_b)$ , where  $q_p$  and  $m_p$  are the charge and mass of the proton and  $\mu_b$  and  $m_b$  are the magnetic moment and masses of the baryons, whose values can be seen in TABLE I. They are introduced, using  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ , through the coupling of the baryons to the electromagnetic field tensor. The  $l$ -sum runs over the two lightest leptons  $l \equiv e, \mu$  and  $\psi_l$  is the lepton Dirac field.

Baryon	p	n	$\Lambda^0$	$\Sigma^+$	$\Sigma^0$	$\Sigma^-$	$\Xi^0$	$\Xi^-$
$M_b$ (MeV)	938	938	1116	1193	1193	1193	1318	1318
$q_b$	1	0	0	1	0	-1	0	-1
$\mu_b/\mu_N$	2.79	-1.91	-0.61	2.46	1.61	-1.16	-1.25	-0.65
$k_b$	1.79	-1.91	-0.61	1.67	-1.61	-0.38	-1.25	0.06

TABLE I: Baryon masses, charges, magnetic moments and anomalous magnetic moments.

The following equations present the scalar and vector densities for the charged and uncharged baryons [38], respectively:

$$\rho_b^s = \frac{|q_b|Bm_b^*}{2\pi^2} \sum_\nu \sum_s^{\nu_{\max}} \frac{\bar{m}_b^c}{\sqrt{m_b^{*2} + 2\nu|q_b|B}} \ln \left| \frac{k_{F,\nu,s}^b + E_F^b}{\bar{m}_b^c} \right|, \quad (6)$$

$$\rho_b^v = \frac{|q_b|B}{2\pi^2} \sum_\nu \sum_s^{\nu_{\max}} k_{F,\nu,s}^b, \quad (7)$$

$$\rho_b^s = \frac{m_b^*}{4\pi^2} \sum_s \left[ E_F^b k_{F,s}^b - \bar{m}_b^2 \ln \left| \frac{k_{F,s}^b + E_F^b}{\bar{m}_b} \right| \right], \quad (8)$$

$$\rho_b^v = \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \left[ \frac{1}{3}(k_{F,s}^b)^3 - \frac{1}{2}s\mu_N k_b B \left( \bar{m}_b k_{F,s}^b + (E_F^b)^2 \left( \arcsin \left( \frac{\bar{m}_b}{E_F^b} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right]. \quad (9)$$

where  $m_b^* = m_b - g_\sigma\sigma$ ,  $\bar{m}_b^c = \sqrt{m_b^{*2} + 2\nu|q_b|B} - s\mu_N k_b B$  and  $\bar{m}_b = m_b^* - s\mu_N k_b B$ .  $\nu = n + \frac{1}{2} - \text{sgn}(q_b)\frac{s}{2} = 0, 1, 2, \dots$  are the Landau levels for fermions with electric charge  $q_b$ ,  $s$  is the quantum number of spin and assumes values  $-1$  for spin down and  $+1$  for spin up.

The energy spectra for the baryons are given by [6]:

$$E_{\nu,s}^b = \sqrt{(k_z^b)^2 + (\sqrt{m_b^{*2} + 2\nu|q_b|B - s\mu_N k_b B})^2 + g_{\omega b}\omega^0 + \tau_{3b}g_{\rho b}\rho^0} \quad (10)$$

$$E_s^b = \sqrt{(k_z^b)^2 + (\sqrt{m_b^{*2} + k_\perp^2 - s\mu_N k_b B})^2 + g_{\omega b}\omega^0 + \tau_{3b}g_{\rho b}\rho^0}, \quad (11)$$

where  $k_\perp = k_x + k_y$ . The Fermi momenta  $k_{F,\nu,s}^b$  of the charged baryons and  $k_{F,s}^b$  of the uncharged baryons and their relationship with the Fermi energies of the charged baryons  $E_{F,\nu,s}^b$  and uncharged baryons  $E_{F,s}^b$  can be written as:

$$(k_{F,\nu,s}^b)^2 = (E_{F,\nu,s}^b)^2 - (\bar{m}_b^c)^2 \quad (12)$$

$$(k_{F,s}^b)^2 = (E_{F,s}^b)^2 - \bar{m}_b^2. \quad (13)$$

For the leptons, the vector density is given by:

$$\rho_l^v = \frac{|q_l|B}{2\pi^2} \sum_{\nu}^{\nu_{\max}} \sum_s k_{F,\nu,s}^l, \quad (14)$$

with the Fermi momentum of the leptons  $k_{F,\nu,s}^l$  defined in terms of the Fermi energy  $E_{F,\nu,s}^l$  and the mass  $\bar{m}_l = m_l^2 + 2\nu|q_l|B$ :

$$(k_{F,\nu,s}^l)^2 = (E_{F,\nu,s}^l)^2 - \bar{m}_l^2, \quad l = e, \mu, \quad (15)$$

The summation over the Landau level runs until  $\nu_{\max}$ , which is defined as:

$$\nu_{\max} = \left\lfloor \frac{(E_F^b + s\mu_N k_b B)^2 - m_b^{*2}}{2|q_b|B} \right\rfloor, \quad \text{charged baryons.} \quad (16)$$

$$\nu_{\max} = \left\lfloor \frac{(E_F^l)^2 - m_l^2}{2|q_l|B} \right\rfloor, \quad \text{leptons} \quad (17)$$

We define the chemical potentials for leptons baryons:

$$\mu_b = E_F^b + g_{\omega b}\omega^0 + \tau_{3b}g_{\rho b}\rho^0, \quad (18)$$

$$\mu_l = E_F^l = \sqrt{(k_{F,\nu,s}^l)^2 + m_l^2 + 2\nu|q_l|B}. \quad (19)$$

From the Lagrangian density (1), and mean-field approximation, the energy density is given by

$$\begin{aligned} \varepsilon_m = & \sum_b \varepsilon_b + \frac{1}{2}m_\sigma\sigma_0^2 \\ & + U(\sigma) + \frac{1}{2}m_\omega\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho\rho_0^2, \end{aligned} \quad (20)$$



where  $\varepsilon_b$  considers charged  $\varepsilon_b^c$  and non-charged  $\varepsilon_b^n$  baryons:

$$\varepsilon_b^c = \frac{|q_b|B}{4\pi^2} \sum_{\nu}^{\nu_{\max}} \sum_s \left[ k_{F,\nu,s}^b E_F^b + (\bar{m}_b^c)^2 \ln \left| \frac{k_{F,\nu,s}^b + E_F^b}{\bar{m}_b^c} \right| \right], \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_b^n = \frac{1}{4\pi^2} \sum_s \left[ \frac{1}{2} k_{F,\nu,s}^b (E_F^b)^3 - \frac{2}{3} s \mu_N k_b B (E_F^b)^3 \left( \arcsin \left( \frac{\bar{m}_b}{E_F^b} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{3} s \mu_N k_b B + \frac{1}{4} \bar{m}_b \right) \left( \bar{m}_b k_{F,\nu,s}^b E_F^b + \bar{m}_b^3 \ln \left| \frac{E_F^b + k_{F,\nu,s}^b}{\bar{m}_b} \right| \right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

The expression for the energy density of leptons  $\varepsilon_l$  reads

$$\varepsilon_l = \frac{|q_l|B}{4\pi^2} \sum_l \sum_{\nu}^{\nu_{\max}} \sum_s \left[ k_{F,\nu,s}^l E_F^l + \bar{m}_l^2 \ln \left| \frac{k_{F,\nu,s}^l + E_F^l}{\bar{m}_l} \right| \right]. \quad (23)$$

The pressures of baryons and leptons are:

$$P_m = \mu_n \sum_b \rho_b^v - \varepsilon_m, \quad (24)$$

$$P_l = \sum_l \mu_l \rho_l^v - \varepsilon_l,$$

where the expression of the vector densities  $\rho_b^v$  and  $\rho_l^v$  are given in (7) and (14), respectively. By summing up the energetic contributions from the magnetic field, we can compose the total energy density and pressure of the system:

$$\varepsilon^{\text{H}} = \varepsilon_m + \varepsilon_l + \frac{\left( B \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \right)^2}{2}, \quad P^{\text{H}} = P_m + P_l + \frac{\left( B \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \right)^2}{2} \quad (25)$$

## B. Quark phase under a magnetic field

For the description of the equation of state (EOS) of quark matter, we consider a (three flavor) quark matter in  $\beta$  equilibrium with magnetic fields. We introduce the lagrangian density

$$\mathcal{L}_Q = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_B \quad (26)$$

where the quark sector is described by the SU(3) version of the Nambu-Jona-Lasinio model (NJL) [45], which includes a scalar-pseudoscalar interaction and the t'Hooft six-fermion interaction. The lagrangian density  $\mathcal{L}_l$  and  $\mathcal{L}_B$  are given by (4) and (5), respectively. The lagrangian density  $\mathcal{L}_f$  is defined by

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}_f [\gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - q_f A^{\mu}) - \hat{m}_c] \psi_f + \mathcal{L}_{\text{sym}} + \mathcal{L}_{\text{det}}, \quad (27)$$

with

$$\mathcal{L}_{\text{sym}} = G \sum_{a=0}^8 \left[ \left( \bar{\psi}_f \lambda_a \psi_f \right)^2 + \left( \bar{\psi}_f i \gamma_5 \lambda_a \psi_f \right)^2 \right], \quad (28)$$

$$\mathcal{L}_{\text{det}} = -K (d_+ + d_-), \quad (29)$$

where  $G$  and  $K$  are coupling constants,  $d_{\pm} = \det_f [\bar{\psi}_f (1 \pm \gamma_5) \psi_f]$ ,  $\psi_f = (u, d, s)^T$  represents a quark field with three flavors,  $\hat{m}_c = \text{diag}_f (m_u, m_d, m_s)$  is the corresponding (current) mass matrix while  $q_f$  represents the quark electric charge;  $\lambda_0 = \sqrt{2/3} I$ , where  $I$  is the unit matrix in the three flavor space; and  $0 < \lambda_a \leq 8$  denote the Gell-Mann matrices. We consider  $m_u = m_d \neq m_s$ . In the mean-field approximation the lagrangian density (27) can be written as [34]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^{\text{MFA}} = & \bar{\psi}_f \left[ \gamma_{\mu} (i \partial^{\mu} - q_f A^{\mu}) - \hat{M} \right] \psi_f \\ & - 2G (\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) + 4K \phi_u \phi_d \phi_s, \end{aligned} \quad (30)$$

where  $\hat{M}$  is a diagonal matrix with elements defined by the effective quark masses

$$M_i = m_i - 4G \phi_i + 2K \phi_j \phi_k \quad (31)$$

with  $(i, j, k)$  being some permutation of  $(u, d, s)$ .

Now, we need to evaluate the grand-canonical thermodynamical potential for the three-flavor quark sector, which can be written as  $\Omega_f = -P_f = \varepsilon_f - \sum_f \mu_f \rho_f - \Omega_0$ , where  $P_f$  represents the pressure,  $\varepsilon_f$  the energy density,  $\mu_f$  the chemical potential and  $\Omega_0$  ensures that  $\Omega_f = 0$  in the vacuum. In the mean-field approximation the pressure can be written as

$$P_f = \theta_u + \theta_d + \theta_s - 2G (\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) + 4K \phi_u \phi_d \phi_s. \quad (32)$$

So, to determine the EOS for the SU(3) NJL model at finite density and in the presence of a magnetic field we need to know the condensates  $\phi_f$  and the contribution from the gas of quasiparticles  $\theta_f$ . Both quantities have been evaluated with great detail in Ref. [33]. For this model we split the degeneracy of each quark into the spin degeneracy and color degeneracy  $N_c$ . The difference now is that both spin projections contribute for Landau levels  $\nu > 0$ , but only one of them contributes for  $\nu = 0$ . The contribution from the gas of quasiparticles for each flavor  $\theta_f = (\theta_f^{\text{vac}} + \theta_f^{\text{mag}} + \theta_f^{\text{med}})_{M_f}$  contains 3 different contributions: the vacuum, the magnetic and the medium one given by

$$\theta_f^{\text{vac}} = -\frac{N_c}{8\pi^2} \left\{ M_f^4 \ln \left[ \frac{(\Lambda + \epsilon_{\Lambda})}{M_f} \right] - \epsilon_{\Lambda} \Lambda (\Lambda^2 + \epsilon_{\Lambda}^2) \right\}, \quad (33)$$

$$\theta_f^{\text{mag}} = \frac{N_c(|q_f|B)^2}{2\pi^2} \left[ \zeta^{(1,0)}(-1, x_f) - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln x_f + \frac{x_f^2}{4} \right], \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \theta_f^{\text{med}} = \sum_{\nu} \frac{\alpha_{\nu} N_c |q_f| B}{4\pi^2} & \left[ \mu_f \sqrt{\mu_f^2 - s_f(\nu, B)^2} \right. \\ & \left. - s_f(\nu, B)^2 \ln \left( \frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - s_f(\nu, B)^2}}{s_f(\nu, B)} \right) \right], \end{aligned} \quad (35)$$

where  $s_f(\nu, B) = \sqrt{M_f^2 + 2|q_f|B\nu}$  is the constituent mass of each quark modified by the magnetic field,  $\epsilon_{\Lambda} = \sqrt{\Lambda^2 + M_f^2}$  with  $\Lambda$  representing a non covariant ultra violet cut off [46],  $x_f = M_f^2/(2|q_f|B)$  and  $\zeta^{(1,0)}(-1, x_f) = d\zeta(z, x_f)/dz|_{z=-1}$  with  $\zeta(z, x_f)$  being the Riemann-Hurwitz zeta function.

Each of the quark condensates,  $\phi_f = \langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = (\phi_f^{\text{vac}} + \phi_f^{\text{mag}} + \phi_f^{\text{med}})_{M_f}$  also contains 3 different contributions: the vacuum, the magnetic and the medium one given by [33]

$$\phi_f^{\text{vac}} = -\frac{N_c M_f}{2\pi^2} \left[ \Lambda \epsilon_{\Lambda} - M_f^2 \ln \left( \frac{\Lambda + \epsilon_{\Lambda}}{M_f} \right) \right], \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \phi_f^{\text{mag}} = -\frac{N_c M_f |q_f| B}{2\pi^2} & \left[ \ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right. \\ & \left. + x_f - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln(x_f) \right], \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \phi_f^{\text{med}} = \sum_{\nu} \frac{\alpha_{\nu} N_c M_f |q_f| B}{2\pi^2} \\ \times \left[ \ln \left( \frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - s_f(\nu, B)^2}}{s_f(\nu, B)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

The quark contribution to the energy density is

$$\varepsilon_f = -P_f + \sum_f \mu_f \rho_f + \Omega_0, \quad (39)$$

where the density  $\rho_f$  corresponds to each different flavor and is given by

$$\rho_f = \sum_{\nu} \frac{\alpha_{\nu} N_c |q_f| B}{2\pi^2} k_{F,f}, \quad (40)$$

with  $k_{F,f} = \sqrt{\mu_f^2 - s_f(\nu, B)^2}$ .

The leptonic contribution for the pressure reads

$$P_l = \sum_l \sum_\nu \frac{\alpha_\nu |q_l| B}{4\pi^2} \left[ \mu_l \sqrt{\mu_l^2 - s_l(\nu, B)^2} - s_l(\nu, B)^2 \ln \left( \frac{\mu_l + \sqrt{\mu_l^2 - s_l(\nu, B)^2}}{s_l(\nu, B)} \right) \right], \quad (41)$$

and finally the vector density and energy density for leptons are given by the equations (14) and (23), respectively. Therefore, the total energy density and the total pressure of the system are given by adding the corresponding contribution of the magnetic field

$$\varepsilon^Q = \varepsilon_f + \varepsilon_l + \frac{\left(B \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right)^2}{2}, \quad P^Q = P_f + P_l + \frac{\left(B \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right)^2}{2}. \quad (42)$$

The parameter set of the NJL model used in the present work is given by [47]  $\Lambda = 631.4$  MeV,  $m_u = m_d = 5.5$  MeV,  $m_s = 135.7$  MeV,  $G\Lambda^2 = 1.835$  and  $K\Lambda^5 = 9.29$ .

### C. Hybrid star

There are two ways of constructing a hybrid star, one with a mixed phase and another without a mixed phase (hadron and quark phases are in direct contact). In the first case, neutron and electron chemical potentials are continuous throughout the stellar matter, based on the standard thermodynamical rules for phase coexistence known as Gibbs condition [5, 37, 48, 49]. In the second case, the electron chemical potential suffers a discontinuity because only the neutron chemical potential is imposed to be continuous. The condition underlying the fact that only a single chemical potential is common to both phases is known as Maxwell condition. Recently, some authors calculated macroscopic quantities as radii and masses for hybrid stars with and without mixed phase and they concluded that the differences were not relevant [37, 48, 49]. Inspired by these results, in the present work we choose the simpler construction for a hybrid star which is based on the Maxwell condition.

For the construction of a hybrid star with the Maxwell condition, we just need to find the point where

$$\mu_n^H = \mu_n^Q \quad \text{and} \quad P^H = P^Q. \quad (43)$$

To construct a hybrid star we consider a system constituted by 8 baryons in the hadron phase and 3 quarks in the quark phase. For the EOS of the hadronic phase we use equation (25)

with  $\kappa_b = 0$  in the equations (16), (21) and (22) (i.e. without anomalous magnetic moment) and for the EOS of the quark phase we use equation (42).

### III. RESULTS

In the sequel we consider two different systems under a strong magnetic field: (A) baryonic, and (B) hybrid matters. In both cases the effects of strong magnetic fields on the macroscopic properties of compact stars were obtained from the integration of the Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equations [50], using as input the EOS obtained from II A and II C subsections for baryonic and hybrid matters, respectively.

We assume that the density-dependent magnetic field  $B$  in the EOS is given by [28, 31, 34, 38, 51]

$$B\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = B_{\text{surf}} + B_0 \left\{ 1 - \exp \left[ -\beta \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \right] \right\}, \quad (44)$$

where  $\rho = \sum_b \rho_b^v$  is the baryon density,  $\rho_0$  is the saturation density,  $B_{\text{surf}}$  is the magnetic field on the surface equal to  $10^{15}$  G in agreement with observational values and  $B_0$  is the magnetic field for larger densities. The remaining parameters  $\beta$  and  $\gamma$  are chosen to reproduce two behaviors of the magnetic field: a fast decay with  $\gamma = 3.00$  and  $\beta = 0.02$ , and a slow decay with  $\gamma = 2.00$  and  $\beta = 0.05$  whose curves can be seen in Fig. 1.

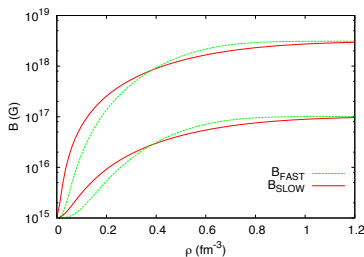


FIG. 1: Variable density dependent magnetic fields for  $B_0 = 10^{17}$  G (lower curves) and  $B = 3.1 \times 10^{18}$  G (upper curves), for FAST (green line) and SLOW (red line) decays.

### A. Baryonic matter

In Fig. 2 we show the equation of state for hadronic matter under the influence of  $B_0 = 10^{17} \text{ G}$  (left panels) and  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$  (right panels) magnetic fields, and with three possible conditions for the inclusion of the anomalous magnetic moment, ( $k_b = 0$ ) for no corrections, ( $k_n$ ) and ( $k_p$ ) for the inclusion of the neutron and proton anomalous magnetic moments and ( $k_{n,p,hypp}$ ) for the inclusion of the corrections for all the baryons, both for slow (upper panels) and fast (lower panels) decays. We see no great difference in any of the cases studied for  $B_0 = 10^{17} \text{ G}$ . As expected, they practically coincide with the non-magnetized curve (in red), as can be seen in the zoomed boxes.

At  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$  we notice the stiffening caused by the larger magnetic field applied, on both fast and slow cases. On the zoomed boxes it is possible to notice the stiffening effects of the inclusion of the corrections due to the magnetic moments, even when only  $\kappa_n$  and  $\kappa_p$  are included. This effect is stronger for higher energy densities, which coincides qualitatively with the effects caused on nucleonic matter founded in [6]. Interestingly, the effect of the inclusion of the anomalous magnetic moment of all the hyperons only becomes evident at higher values of the energy density.

In Fig. 3 we present the particle fractions for hadronic matter with the inclusion of the anomalous magnetic moment of all particles for  $B_0 = 10^{17} \text{ G}$  (left panel) and  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$  (right panel). Comparing the two graphs, we see different behaviors of some abundances caused by the increase in the intensity of the magnetic field, like the kinks produced on the populations of charged particles, due to the filling of Landau levels.

In Fig. 4 we plot the mass-radius relation of hadronic matter under the influence of  $B_0 = 10^{17} \text{ G}$  (left panel) and  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$  (right panel) magnetic fields, and with the three possible conditions for the inclusion of the magnetic moment corrections presented before, both for slow (upper panels) and fast (lower panels) decays. The tails of the hadronic matter were obtained with the insertion of the BPS EOS [52]. On the left as expected, the curves for  $B_0 = 10^{17} \text{ G}$  present maximum masses and radii that do not differ greatly from those found for the non-magnetized EOS (in red), used for comparison, as already expected from previous results in the literature [53]. On the right, for the upper and lower panels, due to the stiffening on the curves for  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$ , caused by the stronger magnetic field, the effects caused by the different behaviors on the decay of the equation (44), become

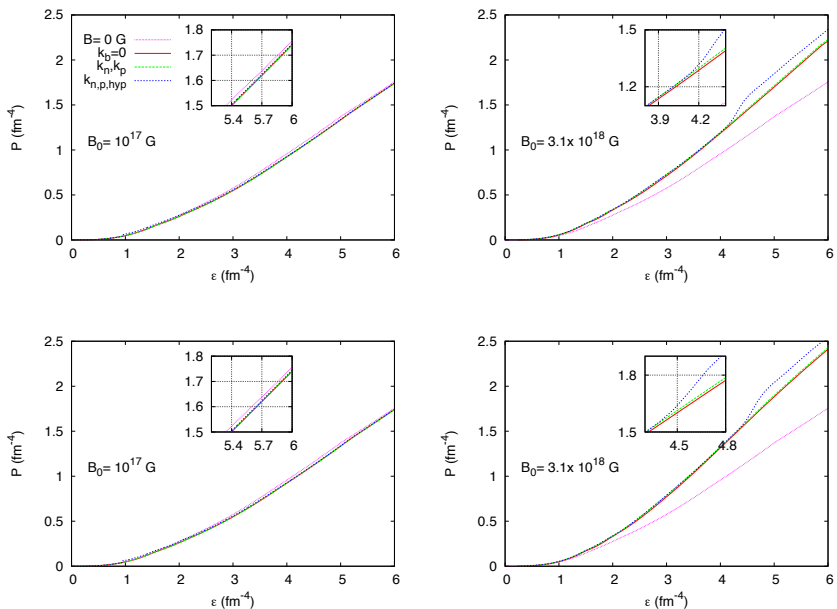


FIG. 2: Equations of State for hadronic matter, with the inclusion of the baryonic octet. Three cases for the inclusion of the anomalous magnetic moments are considered, for slow (upper panels) and fast (lower panels) decays, and for  $B_0 = 10^{17} \text{ G}$  (left panels) and  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$  (right panels).

more evident, and the extensions of these effects on equation (25), from slow to fast decay, generate higher maximum masses and lower radii, for all of the anomalous magnetic moment condition considered. This can be seen in TABLE II.

It is well known that the inclusion of the hyperons softens the EOS, reducing the maximum stellar mass. However, for high values of the magnetic fields, we see that the progressive inclusion of the anomalous magnetic moment stiffens the EOS, first with the curves with only the neutron ( $k_n$ ) and proton ( $k_p$ ) corrections and then with the AMM of all baryons ( $k_{n,p,hyp}$ ), causing the increase of the maximum mass. This happens both with the FAST and SLOW cases. Still for higher magnetic fields, when we compare FAST and SLOW cases, we

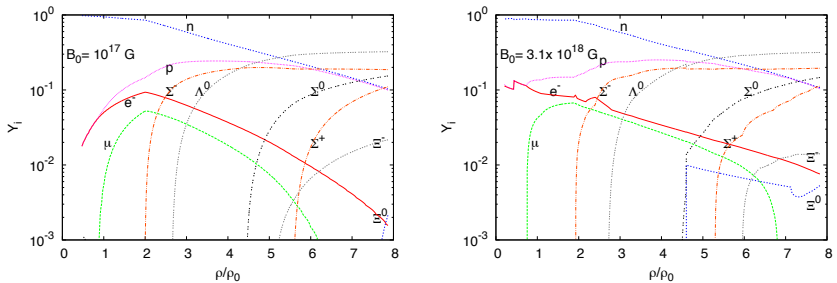


FIG. 3: Particle Fractions for hadronic matter, with the inclusion of the anomalous magnetic moment for all the baryonic octet, for  $B_0 = 10^{17} \text{ G}$  (left panel) and  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$  (right panel).

Magnetic Field	AMM	FAST		SLOW	
		$M_{max}(M_0)$	R (Km)	$M_{max}(M_0)$	R (Km)
$B = 0 \text{ G}$		1.97	12.55	1.97	12.55
$B_0 = 10^{17} \text{ G}$	$\kappa_b = 0$	2.00	11.87	2.00	11.87
	$\kappa_{n,p}$	2.00	11.87	2.00	11.87
	$\kappa_{n,p,hyp}$	2.04	12.24	2.04	12.24
$B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$	$\kappa_b = 0$	2.36	12.37	2.29	12.58
	$\kappa_{n,p}$	2.38	12.53	2.32	12.77
	$\kappa_{n,p,hyp}$	2.39	12.38	2.33	12.54

TABLE II: Mass-radius curves for hadronic matter summarized.

notice that independently of the AMM condition, the maximum masses of the FAST cases are always larger than those of the respective SLOW case. We attribute this to the greater stiffness of the EOS caused by the faster decay in equation (44).

Comparing our results with [31] we confirm that the inclusion of low magnetic fields, of the order of  $B_0 = 10^{17} \text{ G}$  do not produce any significant effect neither on the EOS nor on the particle fractions. No nozzles are noticed, because due to the low magnetic field there are several Landau levels to be filled, even at low densities. Still comparing our results for



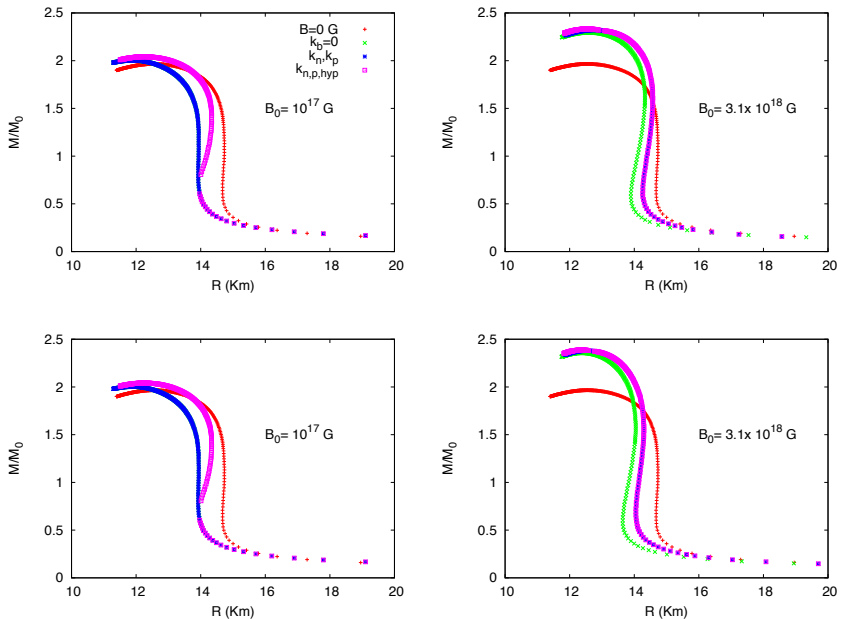


FIG. 4: Mass-radius curves for hadronic matter, with the inclusion of the baryonic octet. Three cases of anomalous magnetic moments are considered,  $k_b = 0$  without magnetic moment corrections,  $k_n$  and  $k_p$  with corrections for neutrons and protons and  $k_{n,p,hyp}$  with the anomalous magnetic moment of all baryons. For  $B_0 = 10^{17} G$  (left panel) and  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} G$  (right panel), for slow (upper panels) and fast (lower panels) decays.

For  $B_0 = 10^{17} G$ , we found for our parametrization without the anomalous magnetic moment corrections ( $k_b = 0$ ) a maximum mass  $M_{max} = 2.00 M_0$  and a radius  $R = 11.87 \text{ Km}$  compatible with the  $M_{max} = 2.01 M_0$  and  $R = 11.86 \text{ Km}$  found in ref. [31].

When we compare our results for  $B_0 = 3.1 \times 10^{18} G$  with those in [31] we confirm the nozzles on the particle fractions at lower densities, due to the possible creation of a new Landau level, and a behavior close to the continuous at higher densities, due to the higher number of filled Landau levels. On the other hand, we also found some different results, mainly because of the choice of the decay parameters of equation (44). For instance, our

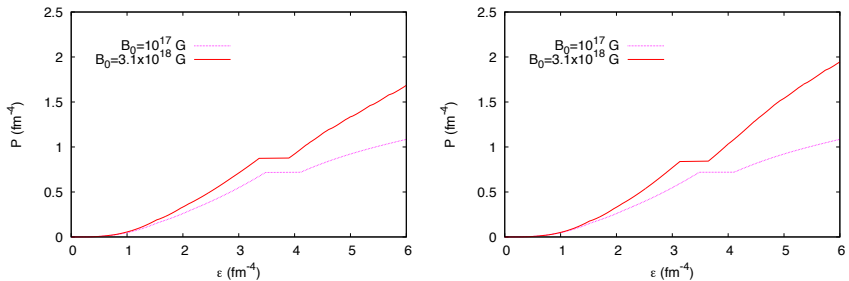


FIG. 5: EOS for the hybrid star without mixed phase built with the GM1 and SU(3) NJL parametrizations, slow (left panel) and fast (right panel) decays.

results for the maximum mass of the EOS with no magnetic moment corrections ( $k_b = 0$ ) are  $M_{max} = 2.36 M_0$  and  $R = 12.37$  Km. In ref. [31], for  $\beta = 6.5 \times 10^{-3}$  and  $\gamma = 3.5$ , the authors obtained  $M_{max} = 2.22 M_0$  and  $R = 11.80$  Km, which corroborates our conclusions that the choice of parameters in the density dependent magnetic field influences the macroscopic properties of the stars.

## B. Hybrid stars

To study the effects of strong magnetic fields on the macroscopic properties of hybrid stars without mixed phase (Maxwell condition) we also assume the density-dependent magnetic field given in Eq.(44). In this case, we choose the same two sets of values for the parameters  $\beta$  and  $\gamma$ , a fast varying field defined by  $\beta = 0.02$  and  $\gamma = 3.00$  and a slowly varying field with  $\beta = 0.05$  and  $\gamma = 2.00$  as in the last section.

In Fig. 5, we plot the EOS of hybrid stars under the influence of weak ( $B_0 = 10^{17}$  G) and strong ( $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$  G) magnetic fields. We note that as in the hadronic case the EOS for  $B_0 = 10^{17}$  G presents no great difference between FAST and SLOW cases. We can see that the onset of the quark phase occurs at  $P \approx 0.72 \text{ fm}^{-4}$  for  $B_0 = 10^{17}$  G regardless of the parametrization for FAST and SLOW cases. For  $B_0 = 3.1 \times 10^{18}$  G the contribution of the magnetic field makes the EOS harder in contrast to EOS for  $B_0 = 10^{17}$  G [54] and this effect is reflected in the higher values of the maximum masses. The presence of a strong

magnetic field also affects the onset of the quark phase. In this case, the onset of the quark phase occurs at  $P \approx 0.84 fm^{-4}$  and  $P \approx 0.87 fm^{-4}$  for FAST and SLOW cases, respectively.

In Fig. 6, we plot the mass-radius relation for both weak ( $B_0 = 10^{17} G$ ) and strong ( $B_0 = 3.1 \times 10^{18} G$ ) magnetic fields. As in the case of hadronic matter the tails of the hybrid stars were obtained with the insertion of the BPS EOS [52]. The values of the maximum masses and radii for a hybrid star are shown in TABLE III. As expected, for  $B_0 = 10^{17} G$  the maximum masses and radii do not differ significantly from those found for  $B_0 = 0$  in ref. [37]. The values found in ref. [37] for the maximum mass and radius are  $M_{max} = 1.91 M_0$  and  $R = 12.82$  Km, respectively. From TABLE III we can see that for  $B_0 = 10^{17} G$  the values of the maximum masses and radii for the two parametrizations of the magnetic field (FAST and SLOW cases) are the same. This result is also expected because the effects caused by the two parametrizations are not evident for a weak magnetic field, exactly as in the case previously discussed for hadronic stars.

The macroscopic properties of hybrids stars under effects of magnetic fields already have been studied in the literature [38]. In ref. [38] the quark phase of the hybrid star is described by MIT bag model with  $m_u = m_d = 5.5$  MeV;  $m_s = 150$  MeV and two values for the Bag constant  $(165 \text{ MeV})^4$  and  $(180 \text{ MeV})^4$ . Comparing our results with [38], we obtain higher maximum masses and radii for weaker magnetic fields. For instance, in ref. [38] for  $B_0 \approx 2.2 \times 10^{18} G$  and  $\text{Bag}^{1/4} = 180$  MeV the authors obtain  $M = 1.74 M_0$ ,  $R = 11.56$  Km (SLOW) and  $M = 1.72 M_0$ ,  $R = 11.49$  Km (FAST) and for  $B_0 \approx 2.2 \times 10^{18} G$  and  $\text{Bag}^{1/4} = 165$  MeV they obtain  $M = 1.72 M_0$ ,  $R = 9.80$  Km (SLOW) and  $M = 1.81 M_0$ ,  $R = 10.07$  Km (FAST). We obtain higher maximum masses and radii even for a weak magnetic field  $B_0 = 10^{17} G$ . As it is well known, the mass and radius of compact stars obtained with the MIT bag model can be calibrated by increasing the value of the Bag constant, but we have to keep in mind that there are limits to the values of the Bag and these values are obtained through the study of stability windows [32, 39]. Therefore, even with strong magnetic fields, hybrid stars that contain a quark core described by the MIT model with Bag values within the range of the stability windows, cannot support large maximum masses. For instance, the stability windows for the MIT bag model are  $147.0 < \text{Bag}^{1/4} < 155.1$  and  $152.1 < \text{Bag}^{1/4} < 159.9$  for  $B = 0 G$  and  $B = 7.2 \times 10^{18} G$ , respectively [32]. These restrictions are not present when the quark phase is described by the NJL model, because the model is already consistent with the requirements for the existence of stable quark matter. Therefore the NJL model

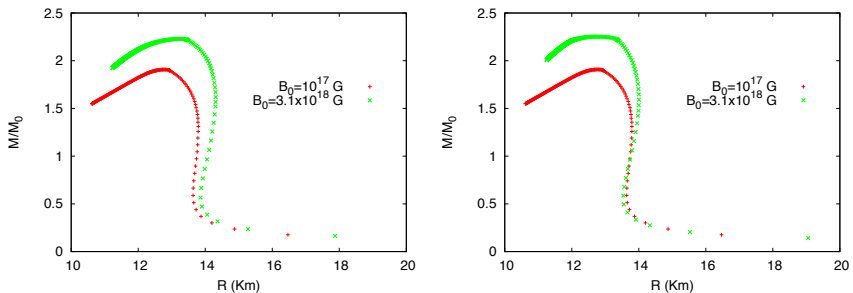


FIG. 6: Mass-radius curves for hybrid stars without mixed phase, SLOW (left panel) and FAST (right panel) cases.

allows a more realistic description of high mass neutron stars.

Magnetic Field	FAST		SLOW	
	$M_{max}(M_0)$	R (Km)	$M_{max}(M_0)$	R (Km)
$B_0 = 10^{17} \text{ G}$	1.91	12.78	1.91	12.78
$B_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ G}$	2.25	12.76	2.23	13.24

TABLE III: Mass-radius curves for hybrid star without mixed phase.

#### IV. CONCLUSIONS

In the present work we have revisited the calculations of magnetars composed of hadronic matter only as in [6, 30] and also composed of a quark core as in [38]. In the first case, the main targets were to compute the differences caused by the individual anomalous magnetic moments in the EOS with the inclusion of hyperons, their particle abundances and the resulting stellar properties. In the second case, our aim was to build a hybrid star with a quark core described by the NJL model, instead of the MIT bag model used in [38]. We have chosen the Maxwell conditions to construct the hybrid star because our main concern was the evaluation of the macroscopic stellar properties obtained from different models and it was already shown in [37] that the Gibbs and Maxwell constructions result in practically

the same results when the NJL model is used for the quark matter.

All calculations were performed with two different values for the magnetic field,  $B = 10^{17}$  G and  $B = 3.1 \times 10^{18}$  G, the last one being the stronger possible value (within our choice of units), for which the anisotropic effects in the pressure can be circumvented, since we have opted to use an isotropic EOS. The magnetic fields were chosen to be density dependent and vary from a surface value of  $B = 10^{15}$  G to the two values mentioned above.

For the low value of the magnetic field,  $B = 10^{17}$  G, we have shown that the results do not differ from the ones obtained for a non-magnetized star. These results are displayed in TABLES II and III and were already well known. When a strong magnetic field,  $B = 3.1 \times 10^{18}$  G, is assumed, some conclusions can be drawn. For hadronic stars, the maximum masses increase with the inclusion of the anomalous magnetic moment and a fast decay mode for the density dependent magnetic field yields larger maximum masses, what is also seen in hybrid stars. Moreover, with the models and constants chosen in the present work, we can describe the recently detected neutron stars with masses of the order of  $2 M_{\odot}$  [18, 19], contrary to what was found, for instance in [38] with a quark core described by the MIT bag model.

## Acknowledgments

This work was partially supported by CAPES, CNPq and FAPESC (Brazil).

- 
- [1] A. R. Bodmer, Phys. Rev. D. **4**, (1971) 1601.
  - [2] E. Witten, Phys. Rev. D. **30**, (1984) 272.
  - [3] N. Itoh, Prog. Theor. Phys. **44**, (1970) 291.
  - [4] J. C. Collins, M. J. Perry, Phys. Rev. Lett. **34**, (1975) 1353.
  - [5] N. K. Glendenning, Compact Stars, Springer, New York (2000).
  - [6] A. Rabhi, C. Providência, and J. Da Providência, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **35**, (2008) 125201.
  - [7] D. P. Menezes and C. Providência, Phys. Rev. C **68**, (2003) 035804; Phys. Rev. C **70**, (2004) 058801; Phys. Rev. C **69**, (2004) 045801.

- [8] J. Schaffner-Bielich, J. Phys. G **31**, (2005) S651.
- [9] G. Pagliara and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. D **77**, (2008) 063004.
- [10] G. Lugones, A. G. Grunfeld, N. N. Scoccola and C. Villavicencio, Phys. Rev. D **80**, (2009) 045017.
- [11] K. Schertler, S. Leupold and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. C **60**, (1999) 025801.
- [12] M. Baldo *et al.*, Phys. Lett. B **562**, (2003) 153.
- [13] I. A. Shovkovy, M. Hanauske and M. Huang, Phys. Rev. D **67**, (2003) 103004.
- [14] M. Buballa, F. Neumann, M. Oertel and I. A. Shovkovy, Phys. Lett. B **595**, (2004) 36.
- [15] T. Kahn *et al.*, Phys. Lett. B **654**, (2007) 170.
- [16] A. W. Steiner, M. Prakash and J. M. Lattimer, Phys. Lett. B **486**, (2000) 239.
- [17] F. Yang and H. Shen, Phys. Rev. C **77**, (2008) 025801.
- [18] P. B. Demorest, et al.: Nature, **467**, (2010) 1081.
- [19] J. Antoniadis et al: Science **340**, (2013) 1233232.
- [20] G. Kouveliotou et al., Nature **393**, (1998) 235.
- [21] R. C. Duncan, C. Thompson, ApJ **392**, L9 (1992); ApJ **469**, (1996) 764.
- [22] M. Chaichian, S. S. Masood, C. Montonen, A. Perez Martinez and H. Perez Rojas, Phys. Rev. Lett. **84**, (2000) 5261.
- [23] A. Perez Martinez, H. Perez Rojas and H. Mosquera Cuesta, Int. J. Mod. Phys. D **17**, (2008) 2107 .
- [24] L. Paulucci, E. J. Ferrer, V. de la Incera and J. E. Horvath, Phys. Rev. D **83**, (2011) 043009.
- [25] A. Perez Martinez, H. Perez Rojas, H. J. Mosquera Cuesta, M. Boligan and M. G. Orsaria, Int. J. Mod. Phys. D **14**, (2005) 1959.
- [26] M. Strickland, V. Dexheimer and D. P. Menezes, Phys. Rev. D **86**, (2012) 125032.
- [27] Xu-Guang Huang et al., Phys. Rev. D **81**, (2010) 045015.
- [28] D. Bandyopadhyay, S. Chakrabarty and S. Pal, Phys. Rev. Lett. **79**, (1997) 2176.
- [29] C. Y. Cardall, M. Prakash and J. M. Lattimer, Astrophys. J. **554**, (2001) 322.
- [30] A. Broderick, M. Prakash and J. M. Lattimer, Phys. Lett. B **531**, (2002) 167.
- [31] L. L. Lopes and D. P. Menezes, Braz. J. Phys. **42**, (2012) 428.
- [32] V. Dexheimer, J. R. Torres and D. P. Menezes, arXiv:1303.5102v1 [astro-ph.HE].
- [33] D. P. Menezes, M. Benghi Pinto, S. S. Avancini, A. Pérez Martínez and C. Providência, Phys. Rev. C **79**, (2009) 035807.

- [34] D. P. Menezes, M. Benghi Pinto, S. S. Avancini and C. Providência, Phys. Rev. C **80**, (2009) 065805.
- [35] B. D. Serot, J. D. Walecka Adv. Nucl. Phys. **16**, (1986) 1.
- [36] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, (1961) 345; **124**, (1961) 246.
- [37] M. G. Paoli and D. P. Menezes, Eur. Phys. J. A **46**, (2010) 413.
- [38] A. Rabhi, H. Pais, P. K. Panda and C. Providência, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **36**, (2009) 115204.
- [39] J. R. Torres and D. P. Menezes, Europhys. Lett. **101**, (2013) 42003.
- [40] M. Buballa Phys. Rep. **407**, (2005) 205.
- [41] M. K. Glendenning and S.A. Moszkowski Phys. Rev. Lett. **67**, (1991) 2414.
- [42] J. Boguta, A. R. Bodmer, Nucl. Phys. A **292**, (1977) 413.
- [43] N. K. Glendenning, Phys. Lett. B **114**, (1982) 392.
- [44] N. K. Glendenning, Ap. J. **293**, (1985) 470.
- [45] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Lett. B **198**, (1987) 126.
- [46] D. Ebert, K. G. Klimenko, M. A. Vdovichenko and A. S. Vshivtsev, Phys. Rev. D **61**, (2000) 025005.
- [47] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rep. **247**, (1994) 221.
- [48] D. N. Voskresensky, M. Yasuhira and T. Tatsumi, Phys. Lett. B **541**, (2002) 93.
- [49] T. Maruyama, S. Chiba, H.-J. Schulze and T. Tatsumi, Phys. Rev. D **76**, (2007) 123015.
- [50] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, Phys. Rev. **33**, (1939) 374.
- [51] G.-J. Mao and Z.-X. Li, Chin. J. Astron. Astrophys. **3**, (2003) 359.
- [52] G. Baym, C. Pethick and P. Sutherland, Astrophys. J. **170**, (1971) 299.
- [53] A. Broderick, M. Prakash and J. M. Lattimer, Astrophys J. **537**, (2000) 351.
- [54] V. Dexheimer, R. Negreiros and S. Schramm, Eur. Phys. J. A **48**, (2012) 189.